APPENDICE

Le corps C des nombres complexes est algébriquement clos

Étant donné un corps K, considérons les propriétés suivantes :

(*a*) Tout polynôme de degré > 0 sur K est un produit de polynômes du premier degré.

(*b*) Tout polynôme de degré > 0 sur K admet une racine dans K.

Il est clair que *a*) implique *b*). Réciproquement, si *b*) est vraie, si $P(X)$ est un polynôme de degré $d \geqslant 1$ sur K et si $a \in K$ est une racine de $P(X)$, alors $P(X)$ est multiple de $X - a$, et une récurrence sur le degré d montre que *a*) est vraie. Un corps K jouissant des propriétés équivalentes *a*) et *b*) est dit *algébriquement clos.*

Nous allons montrer que $\mathbf{C}(= \mathbf{R}[i],\ i^2 = -1)$ est algébriquement clos par une méthode essentiellement due à Lagrange. Nous utiliserons uniquement les faits suivants :

1. Tout polynôme de degré impair sur $\mathbf{R}$ admet une racine dans $\mathbf{R}$; ceci est un cas particulier facile du théorème des valeurs intermédiaires.

2. Tout polynôme du second degré sur $\mathbf{C}$ a ses racines dans $\mathbf{C}$; le calcul élémentaire sur « $ax^2 + bx + c = 0$ » nous ramène à montrer que tout $z = a + ib \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ admet une racine carrée dans $\mathbf{C}$; or $(x + iy)^2 = a + ib$ $(x, y \in \mathbf{R})$ équivaut à $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$, d'où $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$; on en déduit les valeurs de x^2 et y^2, d'où x et y.

3. Étant donné un polynôme non constant $P(X) \in K[X]$, il existe une extension K' de K telle que $P(X)$ se décompose en facteurs du premier degré dans $K'[X]$; ceci a été très facilement démontré dans la prop. 3 du § 3 (démonstration quasi indépendante de ce qui la précède; il suffit de savoir que, si $F(X)$ est irréductible, $K[X]/(F(X))$ est un corps, et ensuite de faire une récurrence).

4. Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

5. Le fait qu'un polynôme symétrique $G(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme par rapport aux fonctions symétriques élémentaires ΣX_i, $\Sigma X_i X_j$, $\ldots$, $X_1 \ldots X_n$ des X_i.

Ceci étant on a :

THÉORÈME. *Le corps* $\mathbf{C}$ *des nombres complexes est algébriquement clos.*

Nous utiliserons la propriété (*b*), que tout polynôme non constant $P(X) \in \mathbf{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbf{C}$. En considérant $F(X) = P(X)\overline{P}(X)$ ($\overline{P}$: polynôme dont les coefficients sont les complexes conjugués des coefficients correspondants de P) on se ramène au cas d'un polynôme à coefficients réels : en effet, si $a \in \mathbf{C}$ est une racine de $F(X)$, alors ou bien a est racine de $P(X)$, ou bien a est racine de $\overline{P}(X)$ et alors $\bar{a}$ est racine de $P(X)$. Ceci étant nous mettrons le degré de $F(X)(\in \mathbf{R}[X])$ sous la forme $d = 2^n q$ où q est impair. Nous procéderons par récurrence sur l'*exposant* n de 2. Pour $n = 0$, d est impair et $F(X)$ a une racine dans $\mathbf{R}$ (cf. 1)). Supposons $n \geqslant 1$. Par 3) il existe une extension K' de $\mathbf{C}$ et $x_1, \ldots, x_d \in K'$ tels que $F(X) = \prod_{i=1}^{d} (X - x_i)$ (en supposant $F(X)$ unitaire, ce qui est loisible). Soit c un élément arbitraire de $\mathbf{R}$; considérons les éléments $y_{ij} = x_i + x_j + cx_ix_j$ de $K'(i \leqslant j)$; leur nombre est $\frac{1}{2} d(d+1) = 2^{n-1}q(d+1)$ et $q(d+1)$ est *impair*. Le polynôme $G(X) = \prod_{i \leqslant j} (X - y_{ij})$ a pour coefficients des polynômes symétriques à coefficients réels en les x_i; ce sont donc par 5) des polynômes à coefficients réels en les fonctions symétriques élémentaires des x_i; ainsi les coefficients de $G(X)$ sont réels par 4). Comme son degré est de la forme $2^{n-1}x$ (impair), l'hypothèse de récurrence montre qu'il admet une racine $z_c \in \mathbf{C}$; l'un des y_{ij}, soit $y_{i(c), j(c)} = x_{i(c)} + y_{j(c)} + cx_{i(c)}x_{j(c)}$ est donc égal à z_c.

Or, comme $\mathbf{R}$ est infini et l'ensemble des couples (i, j) $(i \leqslant j)$ fini, il existe deux nombres réels distincts, c, c' tels que $i(c) = i(c')$ et $j(c) = j(c')$; notons r, s ces indices. Alors $x_r + x_s + cx_rx_s = z_c \in \mathbf{C}$ et

$$x_r + x_s + c'x_rx_s = z_{c'} \in \mathbf{C}.$$

Par combinaisons linéaires on en déduit $x_r + x_s \in \mathbf{C}$ et $x_rx_s \in \mathbf{C}$. Alors, par 4), x_r et x_s sont racines et une équation du second degré à coefficients dans $\mathbf{C}$. Comme $\mathbf{C} \subset K'$, on a donc $x_r, x_s \in \mathbf{C}$ par 2). Ainsi $F(X)$ a une racine dans $\mathbf{C}$, et le théorème est démontré.

La démonstration donnée paraît utilisable dans un cours de spéciales ou de premier cycle, et dans une leçon d'Agrégation.