Nombres complexes

1. Corps $\mathbb{C}$.

. Intuitivement, on construit $\mathbb{C}$ en ajoutant à $\mathbb{R}$ un élément i vérifiant $i^2=-1$, et $\mathbb{C}=\{x+iy, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

. On définit $+$ et $\times$ par : $(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$ et $(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(x'y+xy')$.

. $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps. En particulier, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ $x+iy$ est inversible d'inverse $\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.

. Tout $z\in\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z=x+iy$, où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On pose $Re(z)=x$ et $Im(z)=y$.

. Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

. L'application $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)\to(\mathbb{C},+,\cdot)$ $(x,y)\mapsto x+iy$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev.

. $x+iy$ est appelé l'affixe du vecteur $\vec{x}=(x,y)$ (ou du point $M=(x,y)$).

2. Module d'un nombre complexe.

a) Conjugué.

Def: Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$. On note $\bar{z}=x-iy$, appelé conjugué de z.

|| **Prop**: $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\bar{\bar{z}}=z$

Remarque: l'application $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $z\mapsto\bar{z}$ est un automorphisme de corps (φ est un morphisme de corps d'après la prop précédente et φ est bijectif car $\varphi\circ\varphi=Id$). On a ainsi $\forall z\in\mathbb{C}^*$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$.

|| **Important**: $Re\, z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im\, z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $\bar{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$, $\bar{z}=-z\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$.

b) Module.

Def: Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$. On a $z\bar{z}=x^2+y^2\in\mathbb{R}_+$. On pose $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$, appelé module de z.

Remarque: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Prop: $|z|=0\Leftrightarrow z=0$, $|\bar{z}|=|z|$, $|Re\, z|\leq|z|$ et $|Im\, z|\leq|z|$

dem: $x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$, $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ et $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$

|| **Prop**: $|zz'|=|z||z'|$.

|| **dem**: $|zz'|^2=(zz')(\overline{zz'})=z\bar{z}\ z'\bar{z}'=|z|^2|z'|^2$.

|| **Prop**: (inégalités triangulaires) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ et $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1-z_2|$

|| Cas d'égalité : $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ ssi $z_2=0$ ou $\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}_+$.

|| c'est-à-dire ssi les vecteurs d'affixe z_1 et z_2 sont colinéaires de même sens.

→ **dem**: On a $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2)$

Comme $2Re(z_1\bar{z}_2)\leq2|z_1\bar{z}_2|=2|z_1||z_2|$, alors $|z_1+z_2|^2\leq(|z_1|+|z_2|)^2$.

Il y a égalité ssi $Re(z_1\bar{z}_2)=|z_1\bar{z}_2|$, c'est-à-dire ssi $z_1\bar{z}_2\in\mathbb{R}_+$.

c'est à dire $z_2=0$ ou $\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}_+$ (car $z_1\bar{z}_2=\dfrac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ si $z_2\neq0$).

La seconde inégalité triangulaire se déduit de la première : $|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leq|z_1-z_2|+|z_2|$

d'où $|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|$, et de même $|z_2|-|z_1|\leq|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$.

|| **Remarque**: par récurrence, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|z_i|$

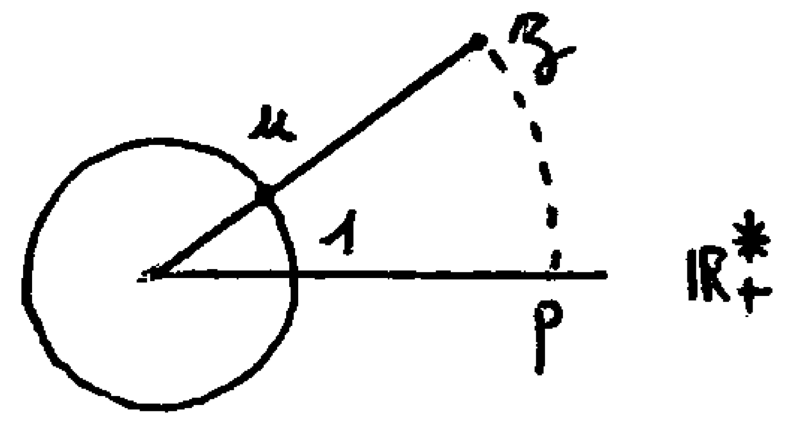
|| **Exemple**: $\left|\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|\leq\sum_{k=0}^{n}|a_k||z|^k$

|| **Exemple**: Si $|z|=A$ et $|u|\leq\varepsilon$ alors $A-\varepsilon\underset{\text{2nde inégalité triangulaire}}{\leq}|z+u|\underset{\text{1ère inégalité triangulaire}}{\leq}A+\varepsilon$

c) Groupe $(U, \times)$.

Def : L'application $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$ $z \mapsto |z|$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

$U = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \}$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ (image réciproque de $\{1\}$).

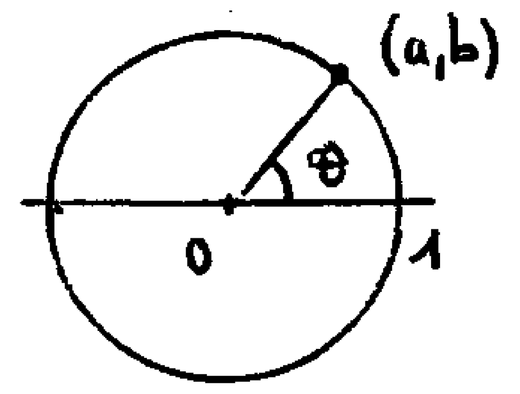


Prop : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique couple $(\rho, u) \in \mathbb{R}_+^* \times U$ tel que $z = \rho u$. L'application $\mathbb{R}_+^* \times U \to \mathbb{C}^*$ $(\rho, u) \mapsto \rho u$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times) \times (U, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

dem : $z = \rho u \iff \rho = |z|$ et $u = \dfrac{z}{|z|}$

3. Argument d'un nombre complexe non nul.

a) Morphisme $\theta \mapsto e^{i\theta}$.



Rappel : on suppose connues sin et cos. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ défini modulo 2π tel que $\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$

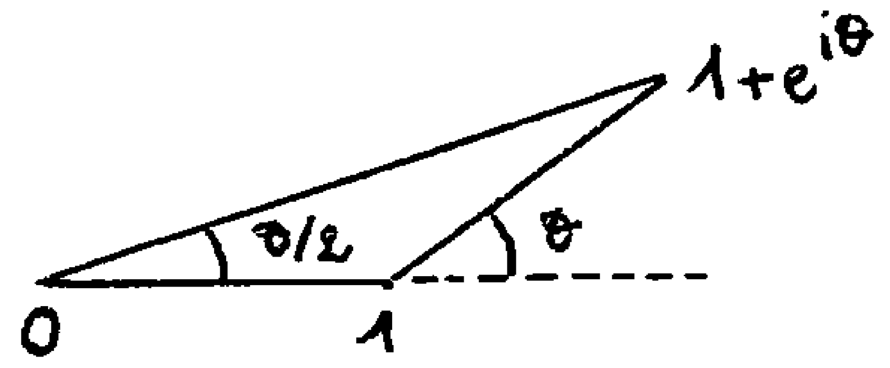
Def : on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Ainsi, $U = \{ e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \} = \{ e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[\}$

Prop : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$ (dem : on utilise la trigo : $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$, ...)

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(U, \times)$

Remarque : $\forall n \in \mathbb{Z}$ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ et $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$



Formules à connaître : $1 + e^{i\theta} = 2 e^{i\theta/2} \cos\dfrac{\theta}{2}$

$1 - e^{i\theta} = -2i e^{i\theta/2} \sin\dfrac{\theta}{2}$

Formule de Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

c'est à dire $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i \sin\theta)^n \right)$ et $\sin n\theta = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n \right)$

b) Argument d'un nombre complexe non nul.

Def : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. z s'écrit de façon unique $z = \rho u$, avec $(\rho, u) \in \mathbb{R}_+^* \times U$. Il existe un unique θ défini modulo 2π tel que $u = e^{i\theta}$. θ est appelé argument de z.

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$; $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\arg(z^n) = n \arg(z)$ $[2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg \bar{z} = -\arg z$ $[2\pi]$

Remarque : la forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ est utile lorsque interviennent des puissances et des produits.

c) Groupe des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Def : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$ ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Remarque : U_n est un sous groupe de $(U, \times)$: $z^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$ donc $U_n \subset U$; $1 \in U_n$

et si $z, z' \in U_n$ $(zz')^n = z^n (z')^n = 1$ c'est à dire $zz' \in U_n$

Prop : $z \in U_n \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ $z = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$

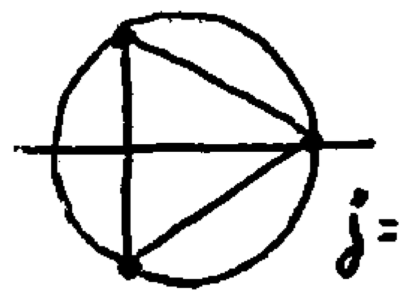
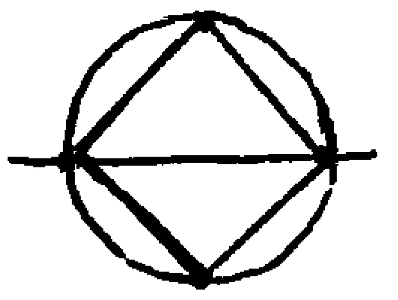
dem : $e^{i\theta} \in U_n \iff e^{in\theta} = 1 \iff n\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ $\theta = \dfrac{2\pi k}{n}$

Remarque : $e^{\frac{2i\pi}{n}k} = e^{\frac{2i\pi}{n}l} \iff \dfrac{2\pi}{n}k \equiv \dfrac{2\pi}{n} l$ $[2\pi] \iff k \equiv l$ $[n] \iff n$ divise $k - l$

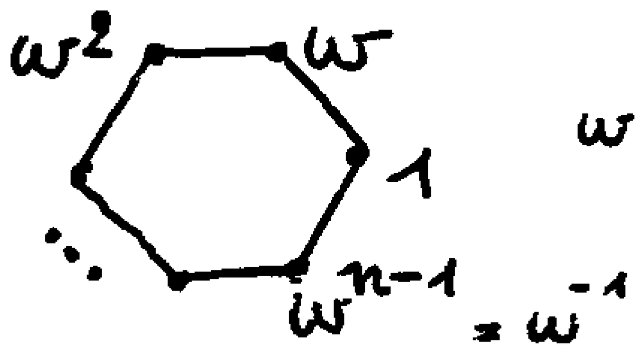
Prop : $z \in U_n \iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ $z = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$.

Posons $\omega = e^{2i\pi/n}$. $U_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ et U_n est de cardinal n.

<u>dem</u> : Soit $k \in \mathbb{Z}$. On effectue la division euclidienne de k par n : $k = qn + r$, avec $0 \leq r \leq n-1$.
On a $e^{2i\pi k/n} = e^{2i\pi r/n}$ car n divise $k - r$.

<u>Exemple</u> : $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{-1, 1\}$; $U_3 = \{1, j, j^2\}$  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$;  $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$

<u>Remarque</u> : l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité forme un polygone régulier.



$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

<u>Résolution de l'équation $z^n = c$</u>, où $c \in \mathbb{C}$.

Si $c = 0$, $z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Supposons $c \neq 0$ et posons $c = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \neq 0$.
Posons $z_0 = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}$. On a $z_0^n = c$ et $z^n = c \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$
Donc les solutions de $z^n = c$ sont les $z_0 \omega$, où $\omega \in U_n$:
on multiplie une solution particulière z_0 par les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

<u>Remarque</u> : l'ens des solutions de $z^n = c$ forme un polygone régulier à n sommets

<u>Exemple</u> : $U_2 = \{-1, 1\}$ donc les racines carrées de c sont opposées.

d) <u>Exponentielle complexe.</u>

<u>Def</u> : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On pose $e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

<u>Remarque</u> : $|e^z| = e^a = e^{\operatorname{Re} z}$, $\arg e^z = b = \operatorname{Im}(z) \; [2\pi]$

<u>Prop</u> : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$ et $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.
$\forall y \in \mathbb{C}^*$ $\exists z \in \mathbb{C}$ $y = e^z$ (on pose $z = \ln|y| + i \arg y$) ; $\forall z \in \mathbb{C}$ $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i$.

4. <u>Racines carrées.</u>

a) <u>Calcul pratique</u>

D'après 2), tout nombre complexe $c = a + ib \neq 0$ admet deux racines carrées opposées u et $-u$.

<u>Attention</u> : ne jamais utiliser le symbole $\sqrt{\ }$ dans $\mathbb{C}$.

Posons $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. D'où :

$$z^2 = c \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z^2 = a \\ \operatorname{Im} z^2 = b \\ |z^2| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2}) \\ 2xy = b \end{cases}$$

l'astuce est d'ajouter cette équation en plus

On obtient les valeurs de x^2 et y^2, d'où 4 couples solutions a priori.
Le signe de xy permet d'en déduire les 2 racines carrées de c.

<u>Exemple</u> : calcul des racines carrées de $3 - 4i$

$$(x+iy)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{25} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = 2 - i \text{ ou } -2 + i$$

b) <u>Equation du second degré.</u>

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

On est ramené au calcul des racines carrées u et $-u$ de $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a $z = \dfrac{-b \pm u}{2a}$

c) Equation du second degré à coefficients réels

On considère l'équation (E) $az^2+bz+c=0$, où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $a\neq 0$. On pose $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta=0$: une racine double réelle $-\frac{b}{2a}$

$\Delta>0$: deux racines réelles $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Delta<0$: deux racines complexes non réelles conjuguées $\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Remarque : notons z_1 et z_2 les racines. On a $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$

Donc, si $\Delta<0$, $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{c}{a}}$ (car z_1 et z_2 sont conjuguées).

5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Soient $a,b\in\mathbb{C}$ tels que $(a,b)\neq(0,0)$. On considère S l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+2}=a u_{n+1}+b u_n$

L'équation (E) $z^2=az+b$ s'appelle l'équation caractéristique associée.

Remarques 1) S est un sev de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$: toute combinaison linéaire de suites vérifiant la relation de récurrence vérifie aussi la relation.

2) Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ est entièrement déterminée par (u_0,u_1) : autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ et si $u_0=v_0$ et $u_1=v_1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=v_n$.
(démonstration par récurrence d'ordre 2).

3) Soit $r\in\mathbb{C}$. $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ ssi r vérifie l'équation caractéristique (E) :
en effet, $[\forall n\in\mathbb{N}\quad r^{n+2}=ar^{n+1}+br^n]\iff r^2=ar+b$ (on met r^n en facteur)

Prop : Notons r et $s\in\mathbb{C}$ les racines de l'équation caractéristique (E).

1er cas : $r\neq s$. $(\Delta\neq 0)$ Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S\iff\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\ \forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\alpha r^n+\beta s^n$.
Autrement dit, S est l'ens des combinaisons linéaires de $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2nd cas : $r=s$ $(\Delta=0)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S\iff\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\ \forall n\in\mathbb{N}\ u_n=(\alpha+\beta n)r^n$.
Autrement dit, S est l'ens des combinaisons linéaires de $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

dém (1er cas) Par la remarque 3), $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$.
Par la remarque 1), $\mathrm{Vect}\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(s^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\subset S$.
Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$. Il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=\alpha(r^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $v_0=u_0$ et $v_1=u_1$.
En effet
$$\begin{cases}v_0=u_0\\ v_1=u_1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\beta=u_0\\ \alpha r+\beta s=u_1\end{cases}\iff\left\{\alpha=\frac{su_0-u_1}{s-r}\text{ et }\beta=\frac{ru_0-u_1}{r-s}\right.$$

On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$. Par la remarque 2), on a $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=v_n$.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=\alpha r^n+\beta v^n$.

(2nd cas) Méthode analogue laissée au lecteur. On commence par prouver que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$. $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ par la remarque 3).
D'autre part, on a : $(n+2)r^{n+2}-a(n+1)r^{n+1}-bnr^n$
$$=\underbrace{nr^n\underbrace{[r^2-ar-b]}_{0}+r^{n+1}\underbrace{[2r-a]}_{\text{vaut 0 car } r=\frac{a}{2}\text{ racine double de (E)}}}_{=0}$$

Exemple : suite de Fibonacci : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
L'équation caractéristique est $z^2 = z + 1$, d'où $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
D'après la prop, il existe (α, β) tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$.
Pour déterminer α et β, on considère u_0 et u_1 (par exemple) :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha + \beta \\ u_1 = 1 = \alpha r + \beta s \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{5} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}) \\ \beta = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) \end{cases}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{2}\left[(1+\frac{1}{\sqrt{5}}) r^n + (1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) s^n \right]$

Remarque : on peut en déduire un équivalent de u_n. Comme $|s| < |r|$, alors $s^n = o(r^n)$. Comme $\alpha \neq 0$, $u_n \sim \alpha r^n$.

Remarque : Supposons $a, b \in \mathbb{R}$, u_0 et $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.
On a bien sûr $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{R}$. Supposons que r et s ne soient pas réelles. Elles sont alors conjuguées, de la forme $r = \rho e^{i\theta}$ et $s = \rho e^{-i\theta}$. Il existe α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_n = \alpha r^n + \beta s^n = \rho^n [\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}]$. (attention α et β ne sont pas réels !)
Comme $u_n \in \mathbb{R}$, on a $u_n = \mathrm{Re}(u_n)$, qui peut s'écrire sous la forme
$u_n = \rho^n [A \cos n\theta + B \sin n\theta]$, où A et $B \in \mathbb{R}$. ($A = \mathrm{Re}(\alpha) + \mathrm{Re}(\beta)$, $B = -\mathrm{Im}(\alpha) + \mathrm{Im}(\beta)$)

6 - Applications trigonométriques.

a) Sommes trigonométriques.

Prop : f désigne $t \mapsto e^{it}$, cos, ou sin. Soient θ et $\alpha \in \mathbb{R}$, p et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$.

$$\sum_{k=p}^{q} f(k\theta + \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\sin[(q-p+1)\frac{\theta}{2}]}{\sin\frac{\theta}{2}} f\left(\frac{p+q}{2}\theta + \alpha\right) & \text{si } \theta \neq 0\ [2\pi] \\ (q-p+1) f(\alpha) & \text{si } \theta = 0\ [2\pi] \end{cases}$$

Règle mnémotechnique : $q-p+1$ est le nombre de termes de la somme et $\frac{p+q}{2}$ est la valeur moyenne de k lorsque k décrit $\{p, p+1, \dots, q\}$.

dem : quitte à prendre ensuite la partie réelle ou imaginaire, on considère $f : t \mapsto e^{it}$.
Posons $S = \sum_{k=p}^{q} e^{i(k\theta+\alpha)}$

1er cas : $\theta = 0\ [2\pi]$. On a $S = \sum_{k=p}^{q} e^{i\alpha} = (q-p+1)e^{i\alpha}$ (car $\forall k$ $\theta k \in 2\pi\mathbb{Z}$)

2nd cas : $\theta \neq 0\ [2\pi]$.

On a $\boxed{e^{i\theta} \neq 1}$. $S = e^{i\alpha} \sum_{k=p}^{q} (e^{i\theta})^k = e^{i\alpha} e^{ip\theta} \sum_{r=0}^{q-p} (e^{i\theta})^r$ (on effectue le changement de variable $k = p + r$)

$$= e^{i\alpha} e^{ip\theta} \frac{e^{i(q-p+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\alpha} e^{ip\theta} \frac{e^{i(q-p+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{i\theta/2}} \frac{\sin(q-p+1)\theta/2}{\sin(\theta/2)}$$

on utilise $e^{ix} - 1 = 2i\, e^{i\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2}$

$$= e^{i\alpha} e^{ip\theta} e^{i(q-p)\theta/2} \frac{\sin(q-p+1)\theta/2}{\sin\theta/2} = e^{i(\frac{p+q}{2}\theta + \alpha)} \frac{\sin(q-p+1)\theta/2}{\sin\theta/2}$$

<u>Exemple</u> : $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \begin{cases} \dfrac{\sin (2n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} & \text{si } \theta \neq 0\ [2\pi] \\ 2n+1 & \text{si } \theta = 0\ [2\pi] \end{cases}$

<u>Remarque</u> : $\displaystyle\lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \theta \neq 0}} \frac{\sin (q-p+1)\theta/2}{\sin \theta/2} = (q-p+1)$ (la somme est d'ailleurs continue par rapport à θ)

b) <u>Formule de multiplications</u>

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$

<u>Problème</u> : exprimer $\cos n\theta$ en fonction des $(\cos\theta)^p (\sin\theta)^q$

<u>Méthode</u> : on utilise les formules de Moivre $\cos n\theta = \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et $\sin n\theta = \mathrm{Im}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

<u>Exemple</u> : $\cos 3\theta = \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos\theta)^3 - 3\cos\theta(\sin\theta)^2 = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$

<u>Polynômes de Tchebytcheff</u> : il existe un polynôme T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$

<u>1ère dem</u> : $\displaystyle\cos n\theta = \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (\sin\theta)^k i^k\right)$

$\displaystyle= \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ pair}}} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (\sin\theta)^k (-1)^{k/2}$ on effectue le ch. de variables $k = 2j$

$\displaystyle= \sum_{j=0}^{E(n/2)} C_n^{2j} (\cos\theta)^{n-2j} (\sin\theta)^{2j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{E(n/2)} C_n^{2j} (-1)^j (\cos\theta)^{n-2j} (1-\cos^2\theta)^j$

donc $\displaystyle T_n = \sum_{j=0}^{E(n/2)} C_n^{2j} (-1)^j X^{n-2j} (1-X^2)^j$ convient (!)

<u>2ème dem</u> : on sait (cf trigo) que $\cos[(n+2)\theta] = 2\cos\theta \cos[(n+1)\theta] - \cos(n\theta)$

On définit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \geq 2$ $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$

<u>Exemple</u> : $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

<u>Remarque culturelle</u> : il n'existe pas de polynôme P_n tel que $\sin n\theta = P_n(\sin\theta)$ si n est pair.

c) <u>Linéarisation</u>

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, et $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

<u>Problème</u> exprimer $(\cos\theta)^p (\sin\theta)^q$ en fonction des $\cos n\theta$ et des $\sin n\theta$.

<u>Méthode</u> : formule d'Euler : $(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^p \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^q$

On développe et on regroupe les termes 2 à 2 conjugués.

<u>Exemple</u> : $(\sin\theta)^3 = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\dfrac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right)$

$= -\dfrac{1}{4}(\sin 3\theta - 3\sin\theta) = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin(3\theta)$

7. <u>Applications géométriques</u>

<u>Rappel</u> : Soient $z, z' \neq 0$. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z\ [2\pi]$

<u>Ensembles remarquables</u> : $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z = 0\ [2\pi]$;

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, z = 0$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z = 0$

Plus généralement, $z e^{-i\theta} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \theta\ [\pi]$ (droite dirigée par $e^{i\theta}$)

a) Interprétation géométrique du module et de l'argument.

A tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$, on associe le point $M = (x,y)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé canonique $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (M est appelé image de z, z affixe de M). On a $|z| = OM$ et si $z \neq 0$, $\arg(z) = \text{angle}(\vec{\imath},\vec{OM})$

Plus généralement, si A et B sont des points d'affixes a et b, $\vec{AB}$ a pour affixe $b-a$

Ainsi $AB = |b-a|$ et si $A \neq B$ $\text{angle}(\vec{\imath},\vec{AB}) = \arg(b-a)$

b) Angle de deux vecteurs.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ deux vecteurs non nuls d'affixe z et z'. Alors $\text{angle}(\vec{u},\vec{u}\,') = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(\bar{z}z')$

En particulier, si M, A et B sont trois points d'affixes z, a et b (tels que $M \neq A$ et $M \neq B$), alors $\text{angle}(\vec{AM},\vec{BM}) = \arg\dfrac{z-b}{z-a} = \arg\,(z-b)\overline{(z-a)}$

c) Transformations usuelles.

t translation de vecteur b : $t(z) = z+b$; homothétie de centre c et de rapport λ : $h(z)-c = \lambda(z-c)$

r rotation de centre c et d'angle θ : $r(z) - c = e^{i\theta}(z-c)$

s similitude directe de centre c, d'angle θ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $s(z)-c = \lambda e^{i\theta}(z-c)$

Réciproquement, si $f : z \mapsto az+b$, avec $a \neq 0$, f est une translation si $a = 1$, une rotation si $a \in U \setminus \{1\}$, une homothétie si $a \in \mathbb{R}$. f admet $c = \dfrac{b}{1-a}$ comme centre si $a \neq 1$.

d) Condition d'alignement.

A, B, C alignés $\iff$ $\text{angle}(\vec{AB},\vec{AC}) = 0$ ou $A = B$ ou $A = C$

$\iff \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ ou $a = b$ ou $a = c$ $\quad$ $\dfrac{c-a}{b-a}$ et $(c-a)\overline{(b-a)}$ ont même argument

$\iff (c-a)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$

Exemple : soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$. les points d'affixes 1, z et $1+z^2$ sont alignés

$\iff \dfrac{(1+z^2)-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ ou $z = 1$ $\iff$ $z^2\,\overline{(z-1)} \in \mathbb{R}$ $\iff$ $\mathrm{Im}\ z^2(\bar{z}-1) = 0$

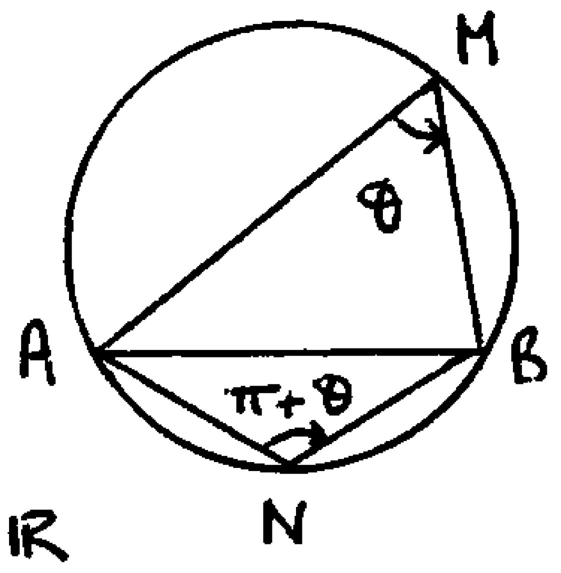
$\iff (y^2-x^2)y + 2xy(x-1) = 0$

$\iff \underbrace{y = 0}_{\text{droite }(Ox)}$ ou $\underbrace{x^2+y^2-2x = 0}_{\text{cercle de centre }(1,0)\text{ et de rayon }1}$ $\quad (x-1)^2+y^2 = 1$

Remarque : $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ orthogonaux ssi $\text{angle}(AB,AC) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ssi $(c-a)\overline{(b-a)} \in i\mathbb{R}$

e) Condition de cocyclicité

Prop : L'ens $\mathcal{C}$ des points M tels que $\text{angle}(\vec{MA},\vec{MB}) = \theta\ [\pi]$ est un cercle passant par A et B si $\theta \neq 0\ [\pi]$ et la droite (AB) sinon (privés de A et B)



dem : On prend $A = (-1,0)$ et $B = (1,0)$. $M \in \mathcal{C} \iff \text{angle}(\vec{MA},\vec{MB}) = \theta\ [\pi]$

$\iff \arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \theta\ [\pi] \iff \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)e^{-i\theta} \in \mathbb{R} \iff (z-1)(\bar{z}+1)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$

$\iff \mathrm{Im}\left((z-1)(\bar{z}+1)e^{-i\theta}\right) = 0 \iff (\sin\theta)(x^2+y^2-1) + 2y(\cos\theta) = 0$

Si $\theta = 0\ [\pi]$, on obtient la droite $y = 0$. Sinon, on obtient $x^2+y^2+2y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 1$, qui est le cercle de centre $\left(0, -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{|\sin\theta|}$

$(\vec{AD},\vec{AC}) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{c-a}{d-a}\right)$

Corollaire : A, B, C, D sont cocycliques ou alignés $\iff$ $\text{angle}(\vec{CA},\vec{CB}) = \text{angle}(\vec{DA},\vec{DB})\ [\pi]$

$\iff \arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) = \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\ [\pi] \iff \left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)\overline{\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)} \in \mathbb{R}$ (ici A,B,C,D distincts)