ORAUX : COMPLEXES

- ou bien t opère sur {a,b} et t' opère sur {a,c}

Posons g :
$$g(a) = a$$
$$g(b) = c$$
$$g(c) = b$$
$$g|_{\complement\{a,b,c\}} = \mathrm{Id}.$$

Alors $t' = g\,t\,g^{-1}$

3. Soit φ un homomorphisme de G dans $\mathbb{C}^*$. G est d'ordre n!. Soit $g \in G$,

$$\varphi(g^{n!}) = \varphi(\mathrm{Id}) = 1$$

donc $\varphi(g)$ est racine n!-ième de 1. Donc : $\varphi(G) \subset U$.

Soit t une transposition, t' une autre transposition. On a :

$$t' = g^{-1} t\, g, \quad \text{donc } \varphi(t') = \varphi(g)^{-1}\varphi(t)\varphi(g) = \varphi(t)$$

De deux choses l'une :

. ou bien $\varphi(t) = 1$, alors $\forall t'$ transposition $\varphi(t') = \varphi(t) = 1$. Comme toute permutation est produit de transpositions $\forall g \in G, \varphi(g) = 1$.

. ou bien $\varphi(t) = -1$, ($\varphi(t^2) = 1$), alors $\forall t'$ transposition, $\varphi(t') = -1$; les transpositions engendrant G, $\varphi = \varepsilon$.

I-15 | * |

Soit G le groupe des substitutions de {1, 2, 3, 4, 5}. Montrer que G, qui a 120 éléments, ne contient aucun élément d'ordre 15.

Supposons que G contient un élément g d'ordre 15 (hypothèse non stupide a priori puisque 15 divise 120).

Décomposons g en produit de cycles :

$$g = \prod_{i}^{k} S_i$$

les S_i commutant deux à deux.

L'ordre de g est alors le PPCM des ordres des S_i, il y a donc au moins un de ces cycles qui est d'ordre 3, un autre d'ordre 5. Les cycles étant disjoints, il y a donc au moins 8 éléments dans l'ensemble sur lequel G opère, ce qui est absurde.

Remarque : On montre de cette manière que le plus petit groupe symétrique contenant un élément d'ordre 15 (ou même un sous-groupe d'ordre 15 : ils sont cycliques) est S_8.

I-16

1. Soit z un complexe de module 1. Montrer que :

$$|1 + z| \geqslant 1$$

ou

$$|1 + z^2| \geqslant 1$$

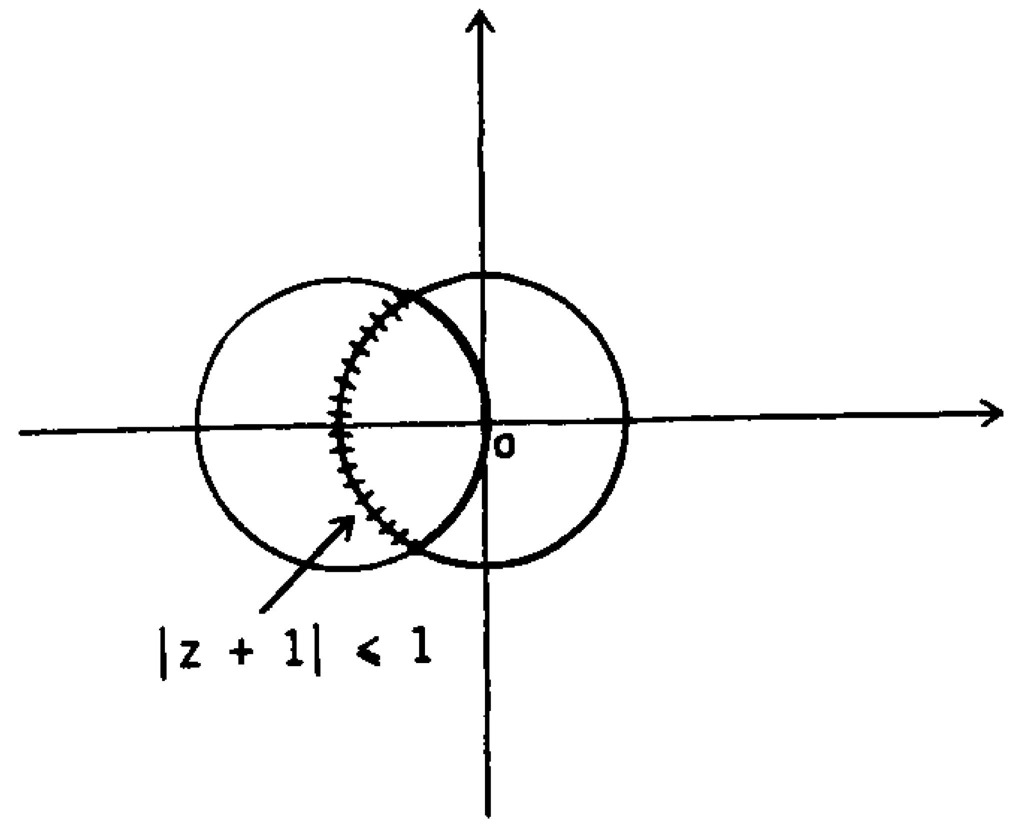
2. Soit z un nombre complexe de module 1 différent de 1. Montrer que :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{0}^{n} z^i\right| \leqslant M$$

La majoration est-elle uniforme en z ?

1. Faisons un dessin :

Si z appartient à la partie non-hachurée du cercle unité $|z + 1| \geqslant 1$



Il faut donc voir ce qui se produit quand z est pris dans la partie hachurée. Précisément, écrivons :

$$z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0,2\pi]$$

La partie non hachurée est : $\{z = e^{i\theta},\ \theta \notin [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]\}$

$$|1 + z|^2 = 2 + 2\cos\theta$$

Si $\theta \notin [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, $\cos\theta > -\frac{1}{2}$, donc $|1 + z|^2 > 1$. Si z est dans la partie hachurée, il y a un seul espoir, c'est que $|1 + z^2| \geqslant 1$.

On a : $z^2 = e^{2i\theta}$, et $2\theta \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$, c'est-à-dire que $\cos 2\theta > -\frac{1}{2}$.
Alors $|1 + z^2|^2 = 2 + \cos 2\theta > 1$.

2. On a :

$$\left|\sum_0^n z^i\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|} \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

On peut améliorer cette majoration (qui est très importante dans l'étude des séries entières).

Si : $z = e^{ix}$,

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})}$$

$$= e^{inx/2} \cdot \frac{\sin (n+1)x/2}{\sin x/2}$$

Donc :

$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

On a donc des domaines dans lesquels on a une majoration <u>uniforme</u>, ce sont les

$$\{z = e^{ix},\ x \in [-\pi,\pi] - [-x_0,x_0]\}$$

I-17

Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{1 - iz}{1 + iz}\right)^n = \frac{1 - ia}{1 + ia}$$

Si z vérifie cette équation $\frac{1 - iz}{1 + iz}$ est l'une des n racines n-ièmes de $\frac{1 - ia}{1 + ia}$. On est donc amené à étudier précisément l'inverse de $z \xrightarrow{f} \frac{1 - iz}{1 + iz}$.

On a :

$$f^{-1}(z) = \frac{iz - i}{z + 1}$$

Fixons a. Alors les racines <u>n-ièmes</u> de $\frac{1 - ia}{1 + ia}$ forment un polygone régulier sur le cercle de rayon $\sqrt[n]{\left|\frac{1 - ia}{1 + ia}\right|}$ de centre 0.

Ce sont donc les intersections de n demi-droites avec ce cercle.

Déterminer les n solutions revient à calculer les transformés du cercle et des n demi-droites par f^{-1}.

Sauf, dans certains cas particuliers, ces transformés sont des cercles. On a maintenant dit le minimum qu'il fallait dire . On peut préciser les formules analytiques. En posant :

$$\frac{1 - ia}{1 + ia} = \rho e^{i\theta}$$

il vient :

$$z = i\,\frac{\rho^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})} - 1}{\rho^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})} + 1}$$

quand $a = i\,\dfrac{\rho e^{i\theta} - 1}{\rho e^{i\theta} + 1}$

Un cas intéressant est celui de $\rho = 1$. Alors $a = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

$$z = -\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

On peut continuer l'étude à l'infini : que se passe t-il quand a est imaginaire pur, de module 1, décrit une strophoïde ...?

I-18

Trouver $z \in \mathbb{C}$ pour que :

- le triangle z, z^2, z^3 soit rectangle, équilatéral, ait son centre de gravité en 0.

- Les points $1, z, z^2, z^3$ soient cocycliques.

1. - Il y a trois possibilités:angle droit en z, z^2, z^3.

- On exprime que les vecteurs représentés par les complexes a et b sont orthogonaux, par la proposition équivalente : " $\frac{a}{b}$ est imaginaire pur".

- On exclut d'emblée les cas $z = 0$, $z = \pm 1$.

* Triangle rectangle en z. On a alors :

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = \lambda i \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$z = -1 + \lambda i \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(Il n'y a pas de vérification à faire puisqu'on procède par équivalence).

* Triangle rectangle en z^2. On a alors :

$$\frac{z^3 - z^2}{z - z^2} = \frac{z^2(z-1)}{z(1-z)} = -z = \lambda i \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition est :

$$z = \lambda i \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(*<u>Remarque</u> : on vérifie facilement sur cet exemple la propriété bien connue :* $AH^2 = -\overline{BH}\cdot\overline{CH}$).

* Triangle rectangle en z^3. On a dans ce cas :

$$\frac{z^2 - z^3}{z - z^3} = \frac{z^2(1-z)}{z(1-z)(1+z)} = \frac{z}{1+z} = \lambda i \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Il vient :

$$z = \frac{-\lambda^2 + \lambda i}{1 + \lambda^2} \qquad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

<u>Remarque</u> : dans les deux premiers cas, on obtient des <u>droites</u> comme ensembles. Dans le troisième cas, il s'agit du transformé de la droite y'Oy *par l'homographie* $u \longrightarrow \frac{u}{1-u}$ *, c'est donc un <u>cercle</u> qu'on peut décrire : on trouve l'équation facilement* $(x^2 + y^2 + x = 0)$, *ou alors on remarque qu'il est facile de décrire ce lieu par :*

$$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad , \quad y = \frac{1}{2}\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

et en posant :

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

il vient :

$$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos a \quad , \quad y = \sin a$$

Enfin, et c'est mieux, on remarque que 0 *et* -1 *sont dans le cercle (*0 *pour* $\lambda = 0$, -1 *pour* $\lambda = \infty$*) et on forme* $\frac{z}{z+1}$ *dont l'argument est toujours égal à* $\pm\frac{\pi}{2}$ *, ce qui prouve que* z *décrit le cercle de diamètre* 0, -1.

Attention à un détail dans ce qui précède : les valeurs particulières de λ $(0,\infty)$ correspondent aux valeurs particulières de $z(0,\pm 1)$.

2. Pour exprimer que le triangle z, z^2, z^3 est équilatéral, on exprime d'abord <u>qu'un</u> des angles au sommet est de $\pm\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{z^3 - z^2}{z - z^2} = -z = -\lambda j \qquad \text{ou } -\lambda j^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$$

On reporte maintenant cette valeur de z dans l'équation qui exprime qu'un autre des angles est de $\pm\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1 = -\mu j \qquad \text{ou } -\mu j^2$$

D'où quatre cas :

$$1 + \lambda j = -\mu j \quad , \quad 1 + \lambda j = -\mu j^2$$
$$1 + \lambda j^2 = -\mu j \quad , \quad 1 + \lambda j^2 = -\mu j^2$$

Plutôt qu'exprimer :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et remplacer, il est bon de tout exprimer en fonction de 1 et j qui constituent une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. On a alors immédiatement :

$1 + \lambda j = -\mu j$ impossible

$1 + \lambda j = -\mu j^2 = +\mu + \mu j$, donc $\lambda = \mu = 1$, $z = j$

$1 + \lambda j^2 = -\mu j$, donc $(1 - \lambda) - \lambda j = -\mu j$, donc $\lambda = \mu = 1$, $z = j^2$

$1 + \lambda j^2 = -\mu j^2$ impossible

Il y a donc deux solutions : $z = j$, et $z = j^2$ au problème.

3. Le triangle z, z^2, z^3 a son centre de gravité en 0. Si et seulement si, $z + z^2 + z^3 = 0$. Il y a donc deux possibilités non triviales : $z = j$ et $z = j^2$

4. Quatre points distincts a, b, c, d sont cocycliques, ou alignés, si, et seulement si, le birapport de ces quatre points est réel :

$$\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Arg}\frac{a-c}{a-d} = \operatorname{Arg}\frac{b-c}{b-d} \quad (\text{modulo } \pi)$$

$$\iff a, b, c, d \text{ cocycliques ou alignés}$$

Pour $1, z, z^2, z^3$ il vient (en supposant $z \neq 0, 1, -1, j, j^2$) :

$$\frac{z^3 - z}{z^3 - 1} : \frac{z^2 - z}{z^2 - 1} \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$\frac{(z+1)^2}{z^2 + z + 1} \in \mathbb{R}$$

$1, z, z^2, z^3$ sont coclycliques ou alignés si z est racine d'une équation de la forme $z^2(1 - r) + z(2 - r) + (1 - r) = 0 \quad (r \in \mathbb{R})$.

Cette équation du second degré admet :

- des racines réelles pour $0 \leqslant r \leqslant \frac{4}{3}$. Les points $1, z, z^2, z^3$ sont évidemment alignés, ce cas ne nous intéresse pas.
- des racines complexes pour $r \notin [0, \frac{4}{3}]$. On remarque que ces racines qui sont de la forme $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont de module 1 puisque $a = c$ $\left(\frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}\right)$.

Ce n'est plus la peine d'étudier l'ensemble des points qui sont de cette forme $\left(z = \frac{r - 2 \pm i\sqrt{r(3r-4)}}{2 - 2r}\right)$. En effet, il est <u>clair</u> que $|z| = 1 \Rightarrow 1, z, z^2, z^3$ coclycliques. On vient de voir que $1, z, z^2, z^3$ coclycliques $\Rightarrow |z| = 1$. L'ensemble cherché est <u>le cercle unité</u>.

Remarque : dans tous ces problèmes, avant toute chose, il est bon de chercher des exemples. Cela guide la recherche, permet de verifier qu'on ne fait pas d'erreur, et comme on vient de le voir, permet d'éviter des études inutiles.