CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2000

COMPOSITION DE PHYSIQUE-CHIMIE

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

L'usage des calculatrices est autorisé

Le but de ce problème est d'étudier de manière simplifiée quelques conséquences de la gravitation : les phénomènes de marée qui s'exercent aussi bien sur les océans de la Terre que sur les planètes et leurs satellites et la propagation des ondes de déplacement de l'eau dans les mers et les océans : ondes de marée et vagues de houle.

Dans le modèle simplifié utilisé, la rotation de la Terre sur elle-même, la révolution de la Lune autour de la Terre et de la Terre autour du Soleil ont lieu dans le même sens autour d'axes parallèles.

Valeurs numériques qui pourront être utilisées dans l'épreuve :

Rapport des masses de la Terre (m_T) et de la Lune (m_L) : $\dfrac{m_T}{m_L} = 81,3$

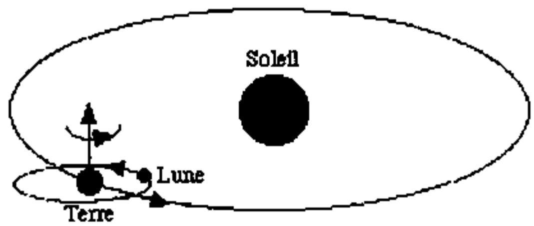
Distance Terre-Lune : $3,8 \times 10^5$ km
Rayon de la Terre : $r_T = 6,4 \times 10^3$ km
Distance Terre-Soleil : $1,5 \times 10^8$ km
Masse du Soleil : $2,0 \times 10^{30}$ kg
Masse de la Terre : $6,0 \times 10^{24}$ kg
Période de révolution de la Lune autour de la Terre : $T_L = 27,3$ j
Période de rotation propre de la Terre : $\mathcal{T}_T = 0,997$ j
Jour solaire moyen : 1 j = 86 400 s
Période de révolution de la Terre autour du Soleil : $T_T = 365,25$ j
Rayon de la Lune : $r_L = 1,7 \times 10^3$ km
Rayon de Saturne : $r_S = 6,0 \times 10^4$ km
Masse volumique moyenne de Saturne : $0,694 \times 10^3$ kg.m^{-3}

Note. Règles de différentiation pour une fonction de plusieurs variables :

Pour une grandeur A = f (x, y), les variations élémentaires dx et dy des variables x et y entraînent une variation dA de A telle que : $dA = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$. Dans cette expression, la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ représente la dérivée de f par rapport à x, la variable y étant alors considérée comme un paramètre.

En particulier, si $f(x, y) = \lambda\, x^\alpha\, y^\beta$, $\dfrac{dA}{A} = \alpha\,\dfrac{dx}{x} + \beta\,\dfrac{dy}{y}$.

Tournez la page S.V.P.



Echelles non respectées

Figure 1

1. Etude d'un système de deux points matériels en interaction gravitationnelle, isolé dans l'espace. Généralisation au cas de deux astres à symétrie sphérique.

1.1. Que peut-on dire du mouvement du centre d'inertie G de ce système ?

1.2. On note O_1 et O_2 les points matériels ; m_1, m_2 leurs masses respectives et D la distance $O_1 O_2$. D'une manière générale, les grandeurs relatives aux deux points seront repérées par l'indice i prenant les valeurs i =1 ou i = 2.

Exprimer $\overrightarrow{GO_1}$ et $\overrightarrow{GO_2}$ en fonction du vecteur $\vec{D} = \overrightarrow{O_1O_2}$ et des masses m_1 et m_2.

1.3. Montrer qu'il existe un référentiel galiléen R_G où G est immobile. Définir ce référentiel. C'est celui qui sera utilisé pour la suite de l'étude.

1.4. Soit $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle. Donner les expressions des forces $\vec{F}_i$ qui s'exercent sur les points O_i en fonction de $\mathcal{G}$, D, m_1, m_2 et $\vec{D}$.

1.5. Quelles sont les accélérations $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ de O_1 et O_2 (respectivement) dans R_G ?

On étudie le cas particulier où les trajectoires de O_1 et de O_2 dans R_G sont des cercles de centre G et de rayons respectifs R_1 et R_2. Montrer que les mouvements de O_1 et de O_2 dans R_G sont uniformes.

- Faire un schéma clair des trajectoires de O_1 et O_2 dans R_G et de leurs positions respectives sur ces trajectoires. En déduire que les rayons vecteurs $\overrightarrow{GO_1}$ et $\overrightarrow{GO_2}$ tournent autour de G à la même vitesse angulaire Ω.

Dans ce qui suit, sauf mention particulière, seul ce type de mouvement sera considéré.

1.6. Calculer les rayons R_i. Établir une relation entre D et la vitesse angulaire Ω. Sous quel nom cette relation est-elle connue ?

1.7. Déterminer les vitesses v_i des deux points matériels O_i en fonction notamment de leurs masses m_i et de leur distance D.

1.8. Que se passe-t-il si $m_1 >> m_2$? Commenter.

1.9. Soit un point fixe G et un point matériel O, de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}$. On appelle moment cinétique de O par rapport à G, $\vec{\sigma}_G(O)$, le produit vectoriel $\overrightarrow{GO} \wedge m\vec{v}$.

Calculer le moment cinétique total du système précédent par rapport à G : $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_G(O_1) + \vec{\sigma}_G(O_2)$. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\vec{\sigma}_G = \vec{D} \wedge \mu \vec{v}_{12}$ avec $\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et μ une masse que l'on déterminera.

1.10. Exprimer $\vec{\sigma}_G$ en fonction de μ, Ω, D et $\vec{k}$, vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire, tel que $(\vec{D}, \vec{v}_{12}, \vec{k})$ forment un trièdre direct. Vérifier que $\vec{\sigma}_G$ se conserve.

1.11. Dans cette question on ne fait pas d'hypothèse sur les trajectoires des points matériels.

On admet que $\dfrac{d\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)}{dt} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \dfrac{d\vec{B}}{dt}$.

Montrer, en calculant $\dfrac{d\vec{\sigma}_G(O)}{dt}$, que $\vec{\sigma}_G$ se conserve aussi dans le cas général d'un point matériel O soumis à une force passant par G puis dans le cas général d'un système de deux points matériels en interaction gravitationnelle.

1.12. Calculer l'énergie cinétique E_c du système des deux points O_i en fonction de μ, D et Ω. (On éliminera $\mathcal{G}$ en utilisant les résultats du mouvement circulaire).

1.13. On définit l'énergie potentielle d'interaction E_p entre les deux points par les relations différentielles suivantes qui font respectivement intervenir les accroissements infinitésimaux dE_p, $d\vec{D}$ et dD des grandeurs E_p, $\vec{D}$ et D :

$$dE_p = -\vec{F}_2 . d\vec{D} = F_2 \, dD \quad \text{avec} \quad F_2 = \left\|\vec{F_2}\right\|$$

Par convention $E_p = 0$ lorsque les deux points sont infiniment éloignés.

Déterminer E_p en imaginant, par exemple, que le point matériel O_2 est éloigné très lentement de O_1 sous l'action d'un opérateur qui lui applique à chaque instant une force $\overrightarrow{F_{op}}$ infiniment proche de $-\overrightarrow{F_2}$ (bien que très légèrement supérieure) et qui, de ce fait, effectue un travail élémentaire $\delta W = dE_p$ lorsque la distance D s'accroît de dD.

- En déduire l'énergie mécanique totale E_m du système considéré en fonction de D, Ω et μ.

1.14. Les points O_i sont les centres de deux astres A_i à symétrie sphérique de rayons r_i, en **rotation propre** autour d'axes parallèles au vecteur unitaire $\vec{k}$, avec des vitesses angulaires Ω_i autour de ces axes.

En supposant les astres homogènes, hypothèse simplificatrice qui est conservée par la suite, il faut alors ajouter au moment cinétique en G calculé précédemment les moments cinétiques de rotation propre $\frac{2}{5} m_i r_i^2 \Omega_i \vec{k}$ et c'est ce moment cinétique total qui se conserve.

Pour l'énergie cinétique, il faut, avec les mêmes hypothèses, ajouter les énergies cinétiques de rotation propre : $\frac{1}{5} m_i r_i^2 \Omega_i^2$.

Donner les expressions du moment cinétique total en G et de l'énergie mécanique totale du système.

Tournez la page S.V.P.

2. Étude statique du phénomène de marées

On néglige ici tout effet dynamique lié aux rotations propres des astres.

On considère un point matériel M de masse m à la surface de A_1 et donc soumis aux attractions de A_1 et de A_2.

2.1. Donner l'expression de la force gravitationnelle $m\vec{a}$ (M) à laquelle il est soumis.

2.2. La différence $\vec{g}$ (M) = $\vec{a}$ (M) - $\vec{a}$ (O_1) représente la "pesanteur apparente" en M. Justifier cette dénomination.

2.3. Décomposer $\vec{g}$ (M) en un terme indépendant de la présence de A_2 que l'on interprétera et un terme $\vec{\gamma}$ (M) dû à la non uniformité du champ gravitationnel créé par A_2, que l'on appelle "terme de marée".

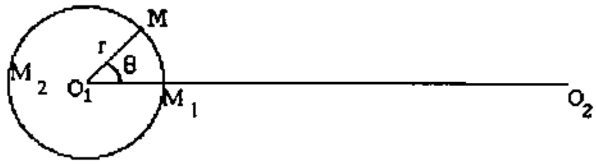


figure 2

2.4. Tracer graphiquement l'allure de $\vec{\gamma}$(M) aux points qui, sur la figure 2, correspondent à $\theta = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

2.5. On suppose $m_1 > m_2$ et l'on suppose de plus que les rayons des astres sont égaux (la masse volumique de A_1 est alors supérieure à celle de A_2). Préciser l'astre sur lequel les effets de marée sont les plus importants.

2.6. Si un astre est recouvert d'une couche de fluide, la forme de sa surface est sensible à la pesanteur apparente. En l'absence du terme de marée, sa forme est bien sphérique, mais l'existence du terme de marée introduit une déformation que l'on suppose pour l'instant proportionnelle à $\vec{\gamma}$.

Faire un schéma qualitatif de la nouvelle surface de l'astre.

2.7. A_1 et A_2 sont la Terre et la Lune. La période de révolution de la Lune autour de la Terre est $T_L = 27{,}3$ j tandis que la Terre fait un tour sur elle-même en $T_T = 0{,}997$ j.

Déduire de ces données et du schéma de la question précédente le temps (exprimé en heures et en minutes) qui, en un point de la Terre tel que le point M_1 de la figure 2, sépare deux marées lunaires.

2.8. La pesanteur apparente $\vec{g}$ (M) dérive d'un potentiel V(M) défini par $dV = -\vec{g}(M) \cdot d\vec{r}$ tel que $V(M) = -\dfrac{A}{r} + \dfrac{B\,r^2}{D^3}(1 - 3\cos^2\theta)$, où r et θ caractérisent la position du point M tandis que A et B sont deux constantes et $d\vec{r}$ une variation élémentaire du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{O_1M}$.

On définit g(M) par l'expression $g(M) = \left\| \vec{g}(M) \right\|$.

M_1 étant le point de la surface de la Terre situé sur l'axe $\overrightarrow{O_1O_2}$, calculer $g(M_1)$ en appliquant la définition donnée à la question 2.2. Pour cela, on supposera r << D et on appliquera l'approximation $(1+x)^a \approx 1 + a\,x$ lorsque $|x| \ll 1$.

Calculer une deuxième fois $g(M_1)$ en appliquant la relation $dV = - \vec{g}(M) \cdot d\vec{r}$ dans le cas où le vecteur élémentaire $d\vec{r}$, de norme dr, est colinéaire à $\overrightarrow{O_1O_2}$ et de même sens.

Déduire de la comparaison de ces deux calculs les valeurs des constantes A et B. Montrer que $\frac{A}{B} = 2\frac{m_1}{m_2}$.

2.9. La forme de la surface libre des océans est donnée par V = Cte.

a. En déduire l'expression de la différence h de hauteur entre la marée basse et la marée haute en fonction du rayon r_T de la Terre, de la distance D entre la Terre et la Lune et des masses m_T et m_L de la Terre et de la Lune. On effectuera comme précédemment les simplifications correspondant à $h \ll r_T \ll D$.

b. Calculer numériquement la valeur de h.

c. Que pensez-vous de ce résultat ?

2.10. En fait, l'ensemble Terre-Lune est soumis à l'attraction du Soleil. En considérant l'ensemble Terre-Soleil comme un système isolé (on néglige donc l'influence de la Lune), calculer l'amplitude h' des marées solaires.

2.11. Ces deux effets de marée se superposent. Expliquer l'alternance des marées dites "de vives eaux" et "de mortes eaux" et calculer l'ordre de grandeur de leur période et de leur amplitude en appliquant le modèle statique précédent.

3. <u>Limite de Roche</u>

On considère une planète A_1 et son satellite A_2, tous deux sphériques. Soit une particule assimilée à un point matériel P appartenant à la surface du satellite. P est aligné avec O_1 et O_2 et l'on suppose que les rayons r_1 et r_2 de A_1 et A_2 sont très inférieurs à D.

3.1. Calculer la résultante des actions gravitationnelles exercées sur P.

3.2. On suppose que la cohésion du satellite n'est due qu'à la gravitation. Quel doit être le sens de $\vec{g}$ (P) pour que cette cohésion soit assurée ?

3.3. Montrer que pour des masses données, m_1 et m_2, de la planète et du satellite, et pour un rayon donné r_2 du satellite, il existe une limite inférieure D_m de la distance D en deçà de laquelle le satellite se brise par effet de marée.

Exprimer D_m en fonction du rayon r_1 de la planète et des masses volumiques moyennes ρ_1 et ρ_2 des deux astres.

3.4. En fait, pour tenir compte, notamment, de l'influence de la déformation du satellite sous l'effet des marées (qui renforce la tendance à l'éclatement du satellite), Édouard Albert Roche a montré, en 1849, que le résultat précédent doit être multiplié par un facteur proche de 2 pour obtenir la valeur réelle D_{mR}.

En prenant $D_{mR} = 2\,D_m$, calculer D_{mR} pour le système Terre-Lune.

3.5. Selon une vieille théorie, la Lune, dont la composition est très voisine de celle des couches externes de la Terre aurait été formée à partir de matière éjectée de ces couches externes alors que la Terre tournait sur elle-même environ dix fois plus vite qu'actuellement. Le résultat précédent vous semble-t-il compatible avec une telle hypothèse ?

Tournez la page S.V.P.

3.6. Les anneaux de la planète Saturne (de rayon r_S) sont essentiellement composés de morceaux de glace ayant un cœur de roche ou de poussières ; leur taille est très variable (du millimètre à 10 m). Le rayon extérieur de ce système d'anneaux est égal à 2,25 r_S.

En appliquant le résultat de la question 3.4 (et en prenant notamment $D_{mR} = 2\ D_m$), calculer la limite de Roche pour la planète Saturne dans le cas d'un satellite constitué de glace dont la masse volumique est égale à $1,0 \times 10^3$ kg.m^{-3}. Commenter brièvement ce résultat.

4. Evolution du système planète-satellite

La planète est l'astre A_1, le satellite l'astre A_2. On suppose que le satellite, dont la vitesse angulaire de révolution autour de A_1 est notée Ω, est constitué d'un noyau rigide entouré d'un manteau visqueux pouvant glisser sur ce noyau. Ce glissement s'effectue avec des frottements. De ce fait, la surface du manteau visqueux se déformant sans cesse à la poursuite de la surface d'équilibre correspondant à V = Cte (questions 2.8 et 2.9), le satellite est le siège de marées qui, à cause des frottements qu'elles génèrent, dissipent en chaleur une partie de son énergie cinétique.

4.1. Représenter sur un schéma la forme d'équilibre du satellite à deux instants différents de sa révolution orbitale. En déduire qualitativement que le satellite acquiert une rotation propre, dont on précisera le sens par rapport au mouvement de révolution orbitale.

4.2. Quelle est la valeur limite de la vitesse angulaire de rotation propre Ω_2 ?

Expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre. Quelle est sa vitesse angulaire de rotation propre ?

4.3. A partir des résultats de la partie 1, montrer qu'avec une très bonne approximation, l'énergie mécanique du système Terre-Lune peut s'écrire $\frac{1}{5} m_1 r_1^2 \Omega_1^2 - \frac{1}{2} \mu D^2 \Omega^2$.

4.4. Montrer qu'avec une bonne approximation, on peut aussi considérer que le moment cinétique en G du système est $\vec{\sigma}_G = (\frac{2}{5} m_1 r_1^2 \Omega_1 + \mu D^2 \Omega)\ \vec{k}$.

4.5. On reprend la relation établie à la question 1.6 liant Ω et D quand les orbites sont circulaires. On suppose que lors de l'évolution de Ω_2 vers sa valeur limite, elles restent circulaires.

- En déduire la relation entre les petites variations relatives $\frac{d\Omega}{\Omega}$ et $\frac{dD}{D}$.

4.6. Le moment cinétique du système est constant pour un système isolé.

Exprimer la variation $d\Omega_1$ de la vitesse angulaire propre de la Terre lorsque D varie de dD et corrélativement Ω de $d\Omega$. En déduire $\frac{d\Omega_1}{d\Omega}$ en fonction de m_1, m_2, D et r_1. Calculer la valeur numérique actuelle de ce rapport.

4.7. Montrer que la variation d'énergie mécanique totale s'exprime par :

$$dE_m = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 (\Omega_1 - \Omega)\, d\Omega_1$$

Quel doit être le signe de dE_m pour $dt > 0$?

4.8. La télémétrie laser montre que la Lune s'éloigne de la Terre à raison de 3 à 4 cm par an (on raisonnera en prenant $\frac{dD}{dt} = 3,8$ cm/an).

En déduire successivement les valeurs approximatives des variations relatives $\frac{dD}{D}$, $\frac{d\Omega}{\Omega}$ et $\frac{d\Omega_1}{\Omega_1}$ pour dt = 1 an. Vérifier que le signe de dE_m pour dt > 0 est bien celui prévu à la question 4.7.

Quelle est la variation de la durée du jour terrestre correspondant à δt = 1 siècle ?

4.9. L'étude des anneaux de croissance des coraux fossiles montre qu'il y a 500 millions d'années, la durée du jour terrestre n'était que de 21 heures actuelles.

Les valeurs numériques de la question 4.8 sont-elles compatibles, en ce qui concerne les ordres de grandeur, avec cette information ?

4.10. En supposant que le système Terre-Lune reste isolé suffisamment longtemps, le phénomène de dissipation d'énergie mécanique E_m lié aux marées terrestres cesserait au bout d'un certain temps. Quelle relation y aurait-t-il alors entre la durée du jour solaire et celle du mois lunaire ?

4.11. A plus long terme, on peut supposer le système Terre-Lune non isolé, sa seule interaction avec l'extérieur étant limitée à l'interaction gravitationnelle avec le Soleil, supposé, lui, inchangé. Quel serait alors l'état final du système Terre-Lune-Soleil ?

5. Étude dynamique du phénomène de marées océaniques de la Terre

L'existence d'un phénomène de marée océanique s'accompagne d'un déplacement de l'eau de l'océan et donc de courants de marée de type alternatif et de fréquence égale à celle des marées.

Le phénomène statique étudié précédemment agit comme un excitateur sinusoïdal source "d'ondes de marée" qui se propagent dans l'océan.

L'étude de la propagation des ondes de déplacement d'un fluide soumis au champ gravitationnel permet de déterminer la célérité de ces ondes : g_0 étant l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre (g_0 = 9,81 m.s^{-2}), si la profondeur de liquide est grande devant la longueur d'onde, la célérité dépend de λ et s'écrit $c = \sqrt{\frac{\lambda g_0}{2\pi}}$; si au contraire la profondeur h de liquide est faible devant λ, c est indépendante de la longueur d'onde et s'écrit : $c = \sqrt{g_0 h}$.

5.1. L'océan Atlantique a une largeur L d'environ 5×10^3 km et une profondeur moyenne h de 3 km. En déduire la longueur d'onde λ en prenant pour période des marées T = 0,52 j.

5.2. Dans un modèle simplifié, on suppose que l'onde de marée issue d'un point d'une côte océanique se propage à travers l'océan, se réfléchit sur la côte opposée, retraverse l'océan et se réfléchit de nouveau, etc. Dans ces conditions, un système dit "d'ondes stationnaires" peut s'établir entre les côtes, qui jouent des rôles symétriques, si la relation $L \geq \frac{\lambda}{2}$ est vérifiée.

Qu'en est-il pour l'océan Atlantique ?

Lorsque certaines conditions particulières portant sur L et λ sont réalisées, chaque onde réfléchie a un effet de même sens que l'onde source et la renforce. L'amplitude de la marée est alors très supérieure à la valeur trouvée à la question 2.11. Quel est le phénomène physique général qui correspond à cette amplification ?

5.3. Soit une baie rectangulaire de longueur L et de profondeur moyenne h s'ouvrant sur l'océan. À l'entrée de la baie, l'océan impose une hauteur d'eau s variant sinusoïdalement en fonction du temps : $s(x = 0, t) = s_0 \cos\omega t$ à la fréquence des marées, avec s_0 = 2,2 m.

A la suite des réflexions des ondes de marée sur la côte, l'onde de marée résultante peut être représentée par une hauteur d'eau de la forme : $s(x,t) = S_{max} \cos \omega t \cos (\frac{2\pi}{\lambda} x - \varphi)$

La baie de Fundy (Canada) est longue de 270 km et a une profondeur moyenne de 73 m.

a. Calculer la longueur d'onde λ de l'onde de marée dans cette baie.

b. Au fond de la baie, l'amplitude de la marée est égale à S_{max}. Calculer cette amplitude.

6. Etude simplifiée de la houle

Les ondes de marée ne sont pas les seules causes du mouvement des océans. Le vent provoque une houle de longueur d'onde très courte comprise par exemple entre 50 et 100 m.

6.1. Comment varie la vitesse de propagation au voisinage d'une plage ?

6.2. En bordure de plage, on observe des vagues déferlantes. Expliquez qualitativement ce phénomène.

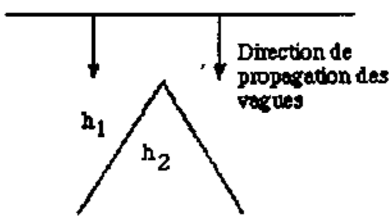


figure 3

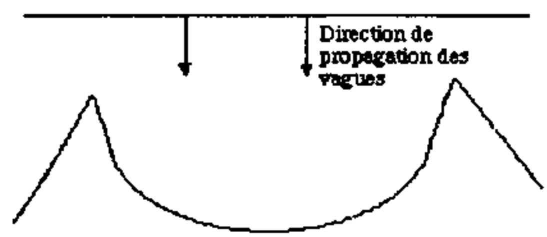


figure 4

6.3. On considère une côte dont le relief peut être modélisé par un fond plat de profondeur h_1, sauf sur un haut-fond de forme triangulaire où la profondeur est $h_2 < h_1$ (figure 3). Par analogie avec l'optique géométrique, indiquer la direction de propagation des vagues sur le haut-fond.

6.4. On considère maintenant une baie en pente douce, dont la forme est donnée par le schéma de la figure 4. Tracer qualitativement la direction de propagation des vagues sur l'ensemble.

Où l'érosion sera-t-elle la plus forte ?