

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2002

COMPOSITION DE PHYSIQUE-CHIMIE

(Classe de terminale S)

DURÉE : 5 heures

Calculatrice autorisée

Ce problème est composé de deux parties. La première partie aborde les lois de base de l'électromagnétisme à partir d'exemples simples. La deuxième partie a pour objet l'étude simplifiée d'un système particulier de conversion d'énergie : l'éolienne.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation des résultats obtenus.

Rappels mathématiques

• La notation $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ représente un vecteur orthogonal au plan défini par \vec{a} et \vec{b} , orienté de façon telle que le trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ soit direct et de norme $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

• $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$; $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

• $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$; $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$

• $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$; $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 : lois de base de l'électromagnétisme

A. Production de champs magnétiques

Dans les systèmes électromagnétiques fonctionnant grâce à la présence d'un champ magnétique (transformateurs, machines électriques tournantes), le champ est produit soit par des aimants permanents soit par des circuits électriques parcourus par des courants.

A.I. Quel procédé expérimental permet de visualiser le spectre magnétique d'un aimant permanent ou d'un circuit électrique parcouru par un courant ?

A.II. Qu'appelle-t-on ligne de champ magnétique ?

A.III. On considère l'aimant parallélépipédique et le solénoïde représentés à la figure 1.

A.III.1. Représenter les lignes de champ à l'extérieur de l'aimant parallélépipédique. Représenter les lignes de champ à l'extérieur et à l'intérieur du solénoïde parcouru par le courant I ($I > 0$). Préciser les pôles Nord et Sud du solénoïde compte tenu du sens de I .

A.III.2. Qu'appelle-t-on champ magnétique uniforme ?

A.III.3. A quelle condition peut-on considérer le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde ?



Figure 1 : vue de dessus d'un aimant parallélépipédique et d'un solénoïde

B. Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit parcouru par un courant

B.I. Expressions des forces magnétiques

Lorsqu'une particule chargée de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} est plongée dans un champ magnétique \vec{B} , elle est soumise à la force magnétique de Lorentz.

La force magnétique de Lorentz est donnée par la relation : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Dans un conducteur métallique parcouru par un courant électrique d'intensité I , le courant qui circule dans un sens donné correspond à un déplacement des électrons libres du métal en sens opposé.

B.I.1. On considère un élément de conducteur rectiligne de longueur dl , de section S , parcouru par un courant d'intensité I (figure 2). On admet que tous les électrons ont une même vitesse \vec{v}_e colinéaire à cet élément.

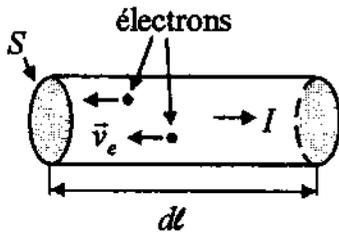


Figure 2

Déterminer l'expression de $|I|$ en fonction de e (valeur absolue de la charge d'un électron), de n (nombre d'électrons libres par unité de volume) de S et de v_e (norme du vecteur vitesse d'un électron).

On rappelle que l'intensité I s'écrit par définition :

$I = dq/dt$; dq est la quantité de charge traversant la surface S pendant l'intervalle de temps dt infiniment petit.

B.I.2. Le conducteur précédent parcouru par le courant I est soumis à un champ \vec{B} uniforme de direction quelconque. On admet que la résultante des forces magnétiques de Lorentz subies par les électrons libres du volume $dl.S$ sous l'action du champ \vec{B} , est intégralement transmise à l'élément conducteur de longueur dl .

Déterminer cette force résultante appelée force de Laplace. Montrer qu'elle se met sous la forme : $d\vec{F}^{Laplace} = I.d\vec{l} \wedge \vec{B}$ avec $d\vec{l} = dl.\vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé suivant le conducteur dans le sens de I .

B.II. Action sur un cadre rectangulaire

On considère un cadre rectangulaire de longueur b (NP), de largeur a (MN), mobile autour d'un axe vertical Δ . Ce cadre comporte une spire d'un conducteur métallique parcouru par un courant d'intensité I ($I > 0$). A l'instant $t = 0$, on plonge le cadre dans un champ \vec{B} uniforme et parallèle aux côtés (MN) et (PQ) du cadre (figures 3a et 3b). On appelle O le centre du cadre.

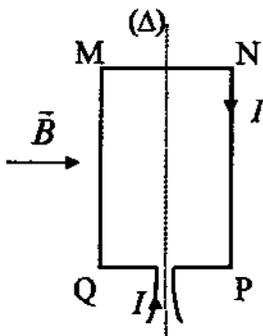


Figure 3a : vue en coupe du cadre à $t = 0$

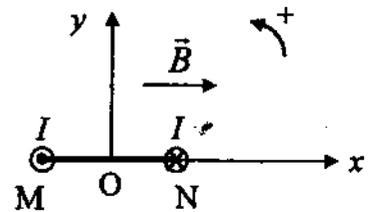


Figure 3b : vue de dessus du cadre à $t = 0$

B.II.1. On admet que la force de Laplace qui s'exerce sur un côté du cadre s'applique au milieu de ce côté.

Représenter à l'instant $t = 0$ les forces de Laplace appliquées aux côtés (MN), (NP), (PQ) et (QM). Que peut-on dire de la somme vectorielle de ces forces ? Quel va être le sens de rotation du cadre ?

B.II.2. Représenter en vue de dessus les forces de Laplace $\vec{F}_{(NP)}$ et $\vec{F}_{(QM)}$ sur les côtés (NP) et (QM) à l'instant t lorsque le cadre a tourné d'un angle θ compté à partir de (Ox). Vérifier que ces deux forces sont de sens opposé et de même norme.

Comment sont dirigées les forces de Laplace sur les côtés (MN) et (PQ) ? Quelle va être leur action sur le cadre ?

B.II.3. On considère une force \vec{f} orthogonale à un axe Δ , appliquée en un point M et dont la distance à l'axe est d (figure 4). On appelle O le point d'intersection entre l'axe Δ et le plan qui lui est orthogonal contenant M. Le vecteur \vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe Δ .

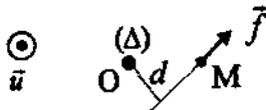


Figure 4 : vue de dessus

On définit le moment \vec{M} de la force \vec{f} par rapport au point

$$O \text{ par : } \vec{M} = \vec{OM} \wedge \vec{f}.$$

Exprimer \vec{M} en fonction de d , f (norme de \vec{f}) et \vec{u} .

B.II.4. Les forces $\vec{F}_{(NP)}$ et $\vec{F}_{(QM)}$ constituent un couple de forces. Elles ont même norme et leur somme vectorielle est nulle. On appelle moment du couple de forces et on note $\vec{\Gamma}$ la somme des moments par rapport au point O des forces $\vec{F}_{(NP)}$ et $\vec{F}_{(QM)}$.

Montrer que $\vec{\Gamma}$ peut s'écrire sous la forme : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{M} = IS\vec{n}$.

\vec{M} s'appelle le moment magnétique associé au cadre ; S représente la surface du cadre. Le vecteur \vec{n} est unitaire et orthogonal au cadre à tout instant. Son sens est défini par la règle du "tire-bouchon" : un tire-bouchon tournant dans le sens de I progresse suivant \vec{n} .

B.II.5. Quel va être, en valeur absolue, l'angle maximal de rotation du cadre ? Conclure sur l'intérêt pratique de ce dispositif.

B.III. Application : galvanomètre à cadre mobile

Le cadre mobile d'un galvanomètre est composé de N spires rectangulaires, de surface S , parcourues par un courant I supposé positif et solidaires d'un cylindre vertical plongé dans un champ magnétique \vec{B} produit par un aimant (figure 5).

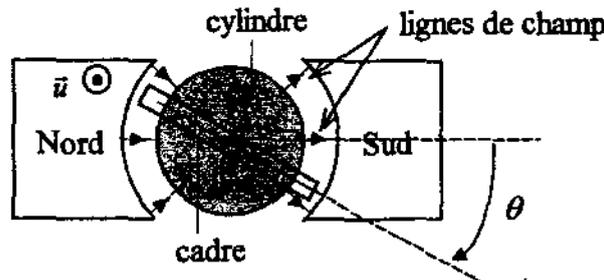


Figure 5 : vue de dessus d'un galvanomètre à cadre mobile

Le cadre est suspendu verticalement par l'intermédiaire d'un fil de torsion qui exerce un moment s'identifiant au moment \vec{M} d'un couple de forces et s'opposant à la rotation du cadre. Son expression, en projection sur l'axe Δ est : $\mathcal{M}_\Delta = \vec{M} \cdot \vec{u} = -C \cdot \theta$ avec θ l'angle de rotation du cadre (négatif sur la figure), C une constante positive appelée constante de torsion et \vec{u} un vecteur unitaire dirigé suivant Δ . Le champ \vec{B} créé par les pôles Nord et Sud de l'aimant est radial, c'est-à-dire qu'en un point P de l'espace entre l'aimant et le cylindre, \vec{B} est orthogonal à l'axe Δ et le coupe. Le sens de \vec{B} est donné par la figure et sa norme B est la même en tout point des brins verticaux des spires.

B.III.1. Exprimer le moment Γ_Δ du couple électromagnétique s'exerçant sur les N spires du cadre projeté sur l'axe Δ ($\Gamma_\Delta = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}$). Ce moment est-il moteur ou résistant ?

B.III.2. En déduire l'angle α de rotation du cadre à l'équilibre. Montrer que α est proportionnel à I .

B.III.3. On définit la sensibilité de cet appareil par $s = \frac{|\alpha|}{I}$. Calculer la sensibilité s pour $N=500$ spires ; $B=0,1$ T ; $S=10$ cm² ; $C=10^{-6}$ N.m.rad⁻¹. Quelle déviation α en degrés correspond à un courant de 10^{-6} A ? Commenter.

B.III.4. Mesure de α

Un miroir plan noté m , fixé au dessus du cadre mobile et dans son plan, tourne avec ce dernier. Un faisceau lumineux issu d'une source S éclaire le miroir (figure 6). La distance miroir-source est notée D . Une règle graduée permet de lire la déviation δ du faisceau lumineux lorsque le miroir tourne d'un angle α .

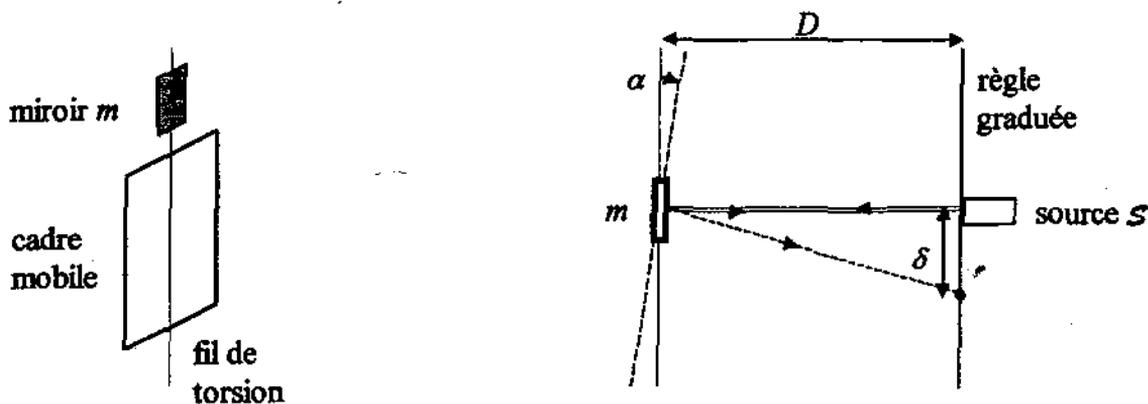


Figure 6 : principe de la mesure de la déviation sur un galvanomètre

Déterminer la déviation δ en fonction de $|\alpha|$ et D .

La déviation minimale décelable est $\delta_{\min}=1$ mm. Pour $D=5$ cm et la valeur de s obtenue à la question précédente, déterminer la valeur absolue de l'intensité du courant minimal I_{\min} décelable avec cet appareil. Conclure sur l'intérêt de cet appareil pour la mesure des courants.

C. Induction électromagnétique

C.I. Formalisation : flux magnétique et force électromotrice d'induction

C.I.1. Flux magnétique à travers une spire

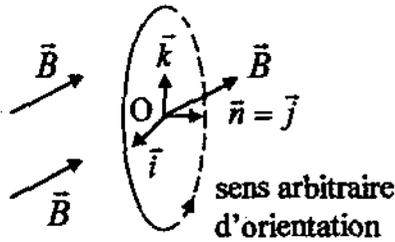


Figure 7 : flux à travers une spire

Pour un champ \vec{B} uniforme, le flux magnétique à travers une spire fermée, orientée arbitrairement, est donné par la relation : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ avec $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ où S est la surface de la spire et \vec{n} un vecteur unitaire normal à la spire dont le sens est fixé grâce à la règle du tire-bouchon (B.II.4) en fonction du sens arbitraire d'orientation de la spire (figure 7).

L'unité de flux magnétique est le weber (Wb).

On considère un repère orthonormé de centre O, celui de la spire, de trièdre direct associé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{n} = \vec{j}$ et \vec{k} suivant la verticale ascendante.

Préciser l'expression du flux ϕ et son signe dans les cas suivants :

$$\vec{B} = B\vec{i} ; \vec{B} = B\vec{j} ; \vec{B} = -B\vec{i} ; \vec{B} = -B\vec{j} \quad (B > 0).$$

C.I.2. Force électromotrice (f.é.m.) induite

Lorsque le flux ϕ traversant une spire varie dans le temps, la spire est le siège d'une force électromotrice e exprimée en volts. On constate alors l'apparition d'un courant induit i dans le circuit.

L'expression de e est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{où } d\phi \text{ est la variation élémentaire du flux dans la spire pendant l'intervalle de temps } dt \text{ infiniment petit : } d\phi = \phi(t+dt) - \phi(t).$$

La f.é.m. e est une grandeur algébrique, comptée selon le sens arbitraire d'orientation de la spire choisi pour calculer ϕ ; si e est positif, le courant induit i , compté dans le même sens que e , est également positif.

On considère le circuit représenté à la figure 8.

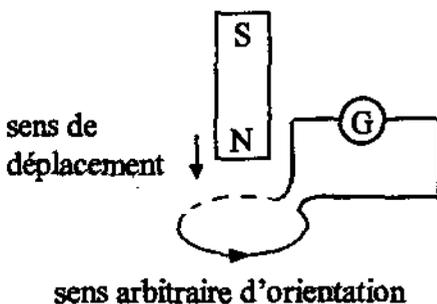


Figure 8

On approche la face Nord d'un aimant d'une spire conductrice qui se referme sur un galvanomètre G à cadre mobile. On suppose que le champ \vec{B} créé par l'aimant est uniforme sur la surface de la spire (spire de dimension petite par rapport à la section de l'aimant) et on choisit un sens arbitraire d'orientation de la spire.

Préciser sur un schéma en les justifiant le sens et le signe de la f.é.m. d'induction e et du courant induit i .

Dans la loi générale de Faraday qui s'exprime comme ci-dessus, ϕ désigne le flux total à travers un circuit ; il correspond à la somme du flux propre dû au circuit lui-même et du flux extérieur dû aux éléments magnétiques environnants.

C.II. Loi de Lenz

Pour étudier d'un point de vue qualitatif le phénomène d'induction électromagnétique dans un circuit électrique, on fait référence à la loi de Lenz ou loi de modération : " le courant induit dans le circuit tend à s'opposer par ses effets à la cause qui lui a donné naissance ".

En faisant référence à la loi de Lenz, retrouver le signe du courant induit dans le circuit de la figure 8.

C.III. Auto-induction

On considère une bobine parcourue par un courant i supposé positif. Par convention, on oriente les spires de cette bobine dans le sens de i .

En raisonnant successivement avec la f.é.m. d'induction e puis avec la loi de Lenz, préciser ce qui se passe dans le circuit si le courant i a tendance à augmenter. On appelle ce phénomène auto-induction.

C.IV. Auto-inductance et mutuelle inductance

C.IV.1. On montre que le champ \vec{B} créé par un solénoïde de longueur ℓ très supérieure à son rayon R , comportant N spires parcourues par un courant i , s'exprime, à l'intérieur du solénoïde, par : $\|\vec{B}\| = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot |i|$ avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ où H est le symbole du henry, unité définie à la question a) ci-dessous. Par convention, on oriente les spires dans le sens de i ; ceci définit la normale \vec{n} commune à toutes les spires (figure 9).



Figure 9

- a) Déterminer le flux magnétique ϕ à travers les N spires du solénoïde. Montrer que ϕ est proportionnel à i .

On appelle auto-inductance ou inductance propre et on note L_p le coefficient de proportionnalité reliant le flux ϕ et le courant i ($\phi = Li$). Ce coefficient s'exprime en Henry et est toujours positif avec la convention choisie.

Vérifier sur l'exemple choisi que ce coefficient ne dépend que des grandeurs géométriques du circuit étudié et du nombre de spires N .

- b) Application numérique : calculer L pour $R=2 \text{ cm}$, $N=150$ spires, $\ell=30 \text{ cm}$.

C.IV.2. On considère deux solénoïdes S_1 et S_2 comportant respectivement N_1 et N_2 spires, de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_2 < R_1$ mais très voisin de R_1 , de longueur ℓ ($\ell \gg R_1$). Ces deux solénoïdes sont bobinés dans le même sens, ont même axe et le solénoïde S_1 est obtenu en bobinant ses spires par dessus celles du solénoïde S_2 sur toute la longueur ℓ . Le solénoïde S_1 est parcouru par un courant i_1 tandis que S_2 est en court-circuit (figure 10).

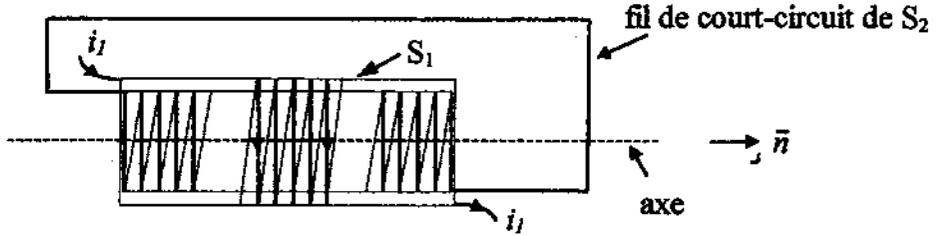


Figure 10

Pour le calcul des flux, la normale \vec{n} commune aux spires des deux solénoïdes est définie à partir du sens de i_1 .

- Déterminer le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ dû à \vec{B}_1 , envoyé par S_1 à travers les N_2 spires de S_2 .
- En déduire l'expression de la f.é.m. induite dans le solénoïde S_2 et le sens positif du courant induit i_2 pour i_1 croissant.
- On pose : $\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{21} \cdot i_1$. On appelle mutuelle inductance le coefficient M_{21} .

Déterminer la mutuelle inductance M_{21} et vérifier qu'elle ne dépend que des nombres de spires et des grandeurs géométriques des circuits.

Avec les valeurs numériques suivantes : $R_1=2$ cm, $R_2=1,8$ cm, $l=30$ cm, $N_1=N_2=150$ spires, calculer M_{21} .

C.IV.3. Bilan

Si on alimente simultanément les deux bobines précédentes (S_2 n'étant plus en court-circuit) par des courants i_1 et i_2 , on peut écrire :

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{2 \rightarrow 1} \\ \phi_2 = \phi_{2 \rightarrow 2} + \phi_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

Le flux ϕ_1 est le flux total à travers les N_1 spires de S_1 : il est la somme du flux propre $\phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 \cdot i_1$ produit par le courant i_1 et du flux $\phi_{2 \rightarrow 1} = M_{12} \cdot i_2$ envoyé par la bobine S_2 dans la bobine S_1 . Pour calculer $\phi_{1 \rightarrow 1}$ et $\phi_{2 \rightarrow 1}$, on oriente par convention les spires de S_1 dans le sens de i_1 .

De même, le flux ϕ_2 est le flux total à travers les N_2 spires de S_2 : il est la somme du flux propre $\phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 \cdot i_2$ produit par le courant i_2 et du flux $\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{21} \cdot i_1$ envoyé par la bobine S_1 dans la bobine S_2 . Pour calculer $\phi_{2 \rightarrow 2}$ et $\phi_{1 \rightarrow 2}$, on oriente par convention les spires de S_2 dans le sens de i_2 .

Pour déterminer M_{12} on admettra que le champ magnétique produit par S_2 seul est nul dans la zone comprise entre les rayons R_2 et R_1 .

Déterminer L_1 , L_2 , M_{12} , M_{21} si i_1 et i_2 ont même sens. Quelle est la relation entre M_{12} et M_{21} ?

Ecrire une inégalité entre L_1 , L_2 , M_{12} , M_{21} .

Comment sont modifiées M_{12} et M_{21} si i_1 et i_2 ont même sens et si les solénoïdes sont bobinés dans des sens opposés ?

Pour deux circuits C_1 et C_2 quelconques, on peut montrer que l'on a les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} M_{12} = M_{21} = M \\ |M| = k \sqrt{L_1 L_2} \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ coefficient inférieur ou égal à 1 appelé coefficient de couplage.}$$

Partie 2 : principe de fonctionnement d'une éolienne

De nos jours, l'énergie cinétique du vent dite énergie éolienne sert principalement à produire de l'électricité. Bien qu'encore partiellement exploitée, cette source d'énergie présente bien des avantages par rapport à d'autres (nucléaire, pétrole, gaz...) : énergie renouvelable et gratuite, absence de pollution et de rejets... En 2005, la production d'électricité française d'origine éolienne devrait représenter 5% de la puissance installée soit 500 MW.

Les éoliennes sont toutes systématiquement composées de trois éléments de base : les ailes ou pales, le rotor ou arbre sur lequel elles sont fixées, l'alternateur qui transforme l'énergie mécanique de rotation en énergie électrique. L'ensemble {pales + rotor} constitue une hélice dans les systèmes les plus couramment utilisés.



Eoliennes en mer

A. Transformation de l'énergie éolienne en énergie mécanique

On s'intéresse ici à la transformation de l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique par l'intermédiaire de l'hélice qui a pour effet de freiner l'air qui l'entraîne et donc de lui emprunter une partie de son énergie cinétique pour la convertir en énergie mécanique de rotation de l'arbre.

A.1. Bilan de matière, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique pour un fluide en écoulement stationnaire

Pour étudier la conversion d'énergie assurée par l'hélice de l'éolienne il est nécessaire de dégager quelques lois fondamentales de la mécanique des fluides. Le fluide étudié est l'air en mouvement qui va entraîner les pales de l'hélice.

On considère une veine d'air à symétrie cylindrique autour d'un axe horizontal (Ox) délimitée par une surface d'entrée S_e , une surface de sortie S_s et une surface latérale S_l (figure 11). On suppose que la masse volumique de l'air est identique et constante en tout point et qu'elle a pour valeur ρ . L'écoulement de l'air est supposé stationnaire : en tout point de la veine d'air les paramètres physiques, en particulier vitesse et pression, sont indépendants du temps. On admet aussi que la pression et la vitesse de l'air sont uniformes sur les sections droites d'entrée S_e et de sortie S_s . Sur toute la surface latérale S_l la pression est uniforme et vaut P_0 .

Le système étudié Σ est un système fermé qui contient un nombre N fixe de molécules d'air. Ce système se trouve en ABCD à l'instant t et en A'B'C'D' à un instant très voisin $t+dt$. On admet que l'aire de la surface d'entrée S_e est inchangée entre t et $t+dt$ ainsi que la pression P_e et la vitesse \vec{v}_e dirigée suivant (Ox) en tout point de cette surface. On admet de même que l'aire de la surface de sortie S_s est inchangée entre t et $t+dt$ ainsi que la pression P_s et la vitesse \vec{v}_s dirigée suivant (Ox) en tout point de cette surface.

On néglige l'influence des forces de pesanteur dans toute la suite.

Tournez la page S.V.P.

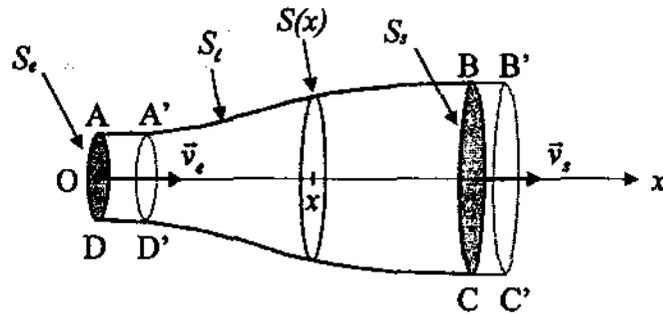


Figure 11 : veine d'air en mouvement

A.I.1. Bilan de matière - conservation du débit massique

a) On appelle dm_e la masse contenue dans le volume AA'D'D et dm_s celle contenue dans BB'C'C. Trouver une relation simple entre dm_e et dm_s .

b) On appelle débit massique à l'entrée et on note $D_{m(e)}$ la quantité dm_e/dt . Exprimer $D_{m(e)}$ en fonction de ρ , S_e , v_e (norme de \vec{v}_e). De même, on appelle débit massique à la sortie et on note $D_{m(s)}$ la quantité dm_s/dt . Exprimer $D_{m(s)}$ en fonction de ρ , S_s , v_s (norme de \vec{v}_s).

Montrer que $D_{m(e)} = D_{m(s)}$.

c) On considère la section $S(x)$ de la veine d'air en x . Définir le débit massique $D_m(x)$ à travers $S(x)$ et montrer que $D_m(x) = D_{m(e)} = D_{m(s)}$.

On dit que le débit massique est une grandeur *conservative* pour toute section de la veine fluide. On l'écrira D_m par la suite.

A.I.2. Bilan de quantité de mouvement - théorème d'Euler

Par définition, on appelle quantité de mouvement $d\vec{p}$ d'une petite masse dm le produit de cette masse par son vecteur vitesse \vec{v} .

a) On note $\vec{p}_{(ABCD)}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant t de la masse contenue dans le volume ABCD. Montrer que $\vec{p}_{(A'B'C'D')}(t) = \vec{p}_{(A'B'C'D')}(t + dt) = \vec{p}_{(ABCD)}$. Déterminer alors la quantité de mouvement $\vec{p}_{(ABCD)}(t)$ en fonction de $\vec{p}_{(A'B'C'D')}$, D_m , \vec{v}_e et dt puis la quantité de mouvement $\vec{p}_{(A'B'C'D')}(t + dt)$ en fonction de $\vec{p}_{(A'B'C'D')}$, D_m , \vec{v}_s et dt .

b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique sous la forme $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$ au système fermé Σ entre les instants t et $t + dt$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. $\Sigma \vec{F}$ représente la somme des forces extérieures appliquées au système Σ .

On pose : $P_e = P_0 + \delta P_e$ et $P_s = P_0 + \delta P_s$. On admet que, sur la surface fermée $(S_e \cup S_s \cup S_t)$, la somme des forces de pression uniquement dues aux termes en P_0 vaut 0.

Montrer alors que : $D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = (\delta P_e S_e - \delta P_s S_s) \vec{u}_x + \Sigma \vec{F}_{autres}$ avec \vec{u}_x vecteur unitaire de l'axe (Ox) et $\Sigma \vec{F}_{autres}$ correspondant à la somme des forces extérieures appliquées à l'air contenu dans Σ , autres que les forces de pression. Cette relation correspond au théorème d'Euler.

A.I.3. Bilan d'énergie cinétique - relation de Bernoulli

On suppose à cette question que : $\Sigma \vec{F}_{autres} = \vec{0}$.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système fermé Σ entre t et $t+dt$ et en ne prenant en compte que le seul travail des forces de pression, montrer que l'on a :

$$\rho \frac{v_e^2}{2} + P_e = \rho \frac{v_s^2}{2} + P_s.$$

Cette équation correspond à une forme simplifiée de la relation de Bernoulli.

A.II. Application à l'éolienne

On considère dorénavant une hélice formée de plusieurs pales identiques (2 ou 3 en général) de rayon R , tournant autour d'un axe (Ox) horizontal, immergée dans de l'air de masse volumique ρ , s'écoulant à la vitesse uniforme \vec{v}_1 . La présence de l'hélice modifie l'écoulement de l'air : celui-ci possède toujours la vitesse \vec{v}_1 loin en amont mais est refoulé à la vitesse \vec{v}_2 loin en aval (figure 12). L'hélice en tournant décrit une surface S orthogonale à (Ox) et on admet que la pression sur les surfaces S_1 , S_2 et S_e est la pression atmosphérique P_0 . Au voisinage de l'hélice, la surface d'entrée de l'air est appelée S^- et la surface de sortie S^+ . Les pressions sur S^- et S^+ sont supposées uniformes de valeurs respectives P^- et P^+ . On admet aussi que $S^- = S^+ = S$ et que les vitesses \vec{v}^- et \vec{v}^+ de l'air au niveau de S^- et S^+ sont uniformes et dirigées suivant (Ox).

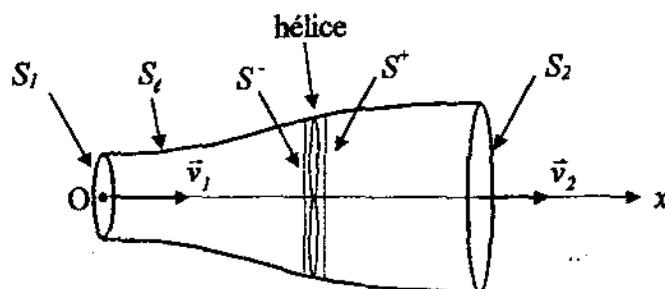


Figure 12 : écoulement de l'air autour de l'hélice

A.II.1. Pour étudier l'évolution de la veine d'air au voisinage de l'hélice, on considère, à l'instant t , le système formé des molécules d'air comprises entre S^- , S^+ et la partie de surface latérale correspondante. A l'aide des relations du A.I, montrer que $\vec{v}^- = \vec{v}^+ = \vec{v}$ puis exprimer la force \vec{F} exercée par l'air sur l'hélice en fonction de S , δP^- et δP^+ . On posera : $P^- = P_0 + \delta P^-$ et $P^+ = P_0 + \delta P^+$.

A.II.2. Exprimer le théorème d'Euler entre l'entrée S_1 et la sortie S_2 de la veine d'air.

A.II.3. Exprimer la relation de Bernoulli entre l'entrée S_1 et l'amont de l'hélice S^- puis entre l'aval de l'hélice S^+ et la sortie S_2 . Justifier dans chaque cas l'utilisation de cette relation.

A.II.4. Dédire des relations précédentes l'expression de \vec{v} en fonction de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .

A.II.5. Puissances mécanique et cinétique

a) Calculer en fonction de ρ , S , v et v_1 la puissance mécanique P_m prélevée par l'hélice au vent. Pour ce calcul, on admet que P_m peut s'exprimer par : $P_m = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer la puissance cinétique $P_c = dE_c/dt$ du vent sur la surface S en absence d'hélice c'est-à-dire lorsque l'écoulement de l'air n'est pas perturbé.

A.II.6. Rendement

- a) On définit le rendement de l'hélice par : $\eta_h = P_m / P_c$. Justifier cette définition. Exprimer η_h en fonction de $k=v/v_l$.
- b) Calculer la valeur de k pour laquelle η_h est maximum puis déterminer η_{hmax} . Cette valeur maximale théorique du rendement de l'hélice est appelée limite de Betz.

A.II.7. Éléments mécaniques de dimensionnement d'une éolienne

On veut construire une éolienne de puissance mécanique P_m , pour une vitesse moyenne du vent $v_l=6 \text{ m.s}^{-1}$ et une masse volumique de l'air $\rho=1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.

- a) Déterminer le rayon minimum R_{min} des pales, pour $P_m=10 \text{ kW}$ puis $P_m=100 \text{ kW}$. Commenter.
- b) On définit un paramètre de vitesse $\lambda=u/v_l$ avec u vitesse tangentielle de l'extrémité d'une pale en rotation ; λ dépend essentiellement du nombre de pales, de leur forme, de leur poids, de leur angle d'inclinaison par rapport à la verticale.

Comment évolue u avec le poids des pales ? avec le nombre de pales ?

Pour $\lambda=10$, $P_m=10 \text{ kW}$, $R=R_{min}$, déterminer la vitesse de rotation Ω de l'hélice en rad.s^{-1} puis en tr.min^{-1} .

Dans toute la suite, on supposera que la conversion de la puissance P_m prélevée au vent par l'hélice en puissance de rotation P_r de l'arbre s'effectue sans pertes ($P_m=P_r$).

B. Transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique

La conversion de l'énergie mécanique de rotation de l'arbre en énergie électrique est effectuée par une machine électrique appelée alternateur. Le rotor de l'alternateur est accouplé directement à l'arbre de l'hélice pour un alternateur basse vitesse ou par l'intermédiaire d'un multiplicateur de vitesse pour un alternateur classique tournant à 3000 tr.min^{-1} .

Dans toute la partie B, on utilisera les résultats de la partie I et on étudiera un alternateur réalisé à partir d'une machine synchrone. Ce type d'alternateur est adapté aux éoliennes de puissance mécanique inférieure à 10 kW .

B.I. Principe de l'alternateur monophasé

Une représentation simplifiée d'un alternateur monophasé est donnée sur les figures 13a et 13b. Il comporte une partie fixe appelée stator ou induit et une partie mobile appelée rotor ou inducteur. Les deux cylindres concentriques, de longueur l et d'axe (Oz) réalisant le stator et le rotor, sont séparés par l'entrefer d'épaisseur constante ε très faible par rapport au rayon R du rotor.

Le stator comprend une bobine ou enroulement constituée de N spires d'aire S , logées dans les encoches A et A' diamétralement opposées. La normale \vec{n} à cette bobine définit son axe.

Le rotor est constitué d'un cylindre plein sur lequel est logé, dans les encoches B et B', un enroulement semblable à celui du stator. Cet enroulement comporte N' spires d'aire $S' \approx S$; sa normale \vec{N} , fait un angle $\theta(t)$ avec \vec{n} à un instant donné t .

La bobine rotorique alimentée par un courant continu I_r produit un champ \vec{B}_r ; entraîné à la vitesse Ω par l'hélice de l'éolienne, ce champ balaie l'enroulement fixe du stator en y induisant une f.é.m. $e(t)$.

On donne l'aire S des spires statoriques ou rotoriques : $S=2R\ell$. On suppose qu'à $t=0$ $\theta=0$. Un point M de l'entrefer est repéré par l'angle orienté $\alpha = (\vec{n}, \vec{u}_r)$.

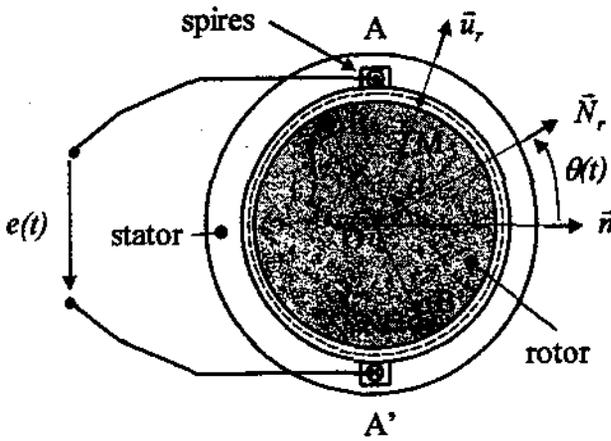


Figure 13a : face avant de l'alternateur

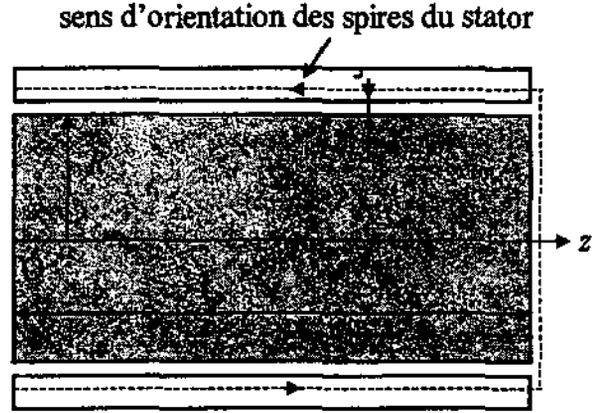


Figure 13b : coupe longitudinale suivant AA'

On considère un point M appartenant à la ligne moyenne d'entrefer ; c'est le cercle de centre O , de rayon $R+\delta/2$, représenté en pointillé sur la figure 13a.

On démontre, grâce aux lois de l'électromagnétisme, que le champ \vec{B}_r créé en M par l'enroulement rotorique est radial donc dans la direction du vecteur unitaire \vec{u}_r , de la droite (OM) . En outre, \vec{B}_r a une norme constante notée B_r pour tout angle α . Pour $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\pi}{2} + \theta\right]$, $\vec{B}_r = B_r \cdot \vec{u}_r$. Pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{3\pi}{2} + \theta\right]$, $\vec{B}_r = -B_r \cdot \vec{u}_r$.

On admet aussi en électromagnétisme que le flux magnétique Φ_{RS} envoyé par l'enroulement rotorique dans les N spires de l'enroulement statorique peut être calculé à travers la surface latérale du demi-cylindre d'axe (Oz) , de rayon $R+\delta/2$, de longueur ℓ et tel que $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

B.I.1. Déterminer l'expression du flux $\Phi_{RS}(\theta)$ en fonction de N , S , B_r et θ pour $\theta \in [0, \pi]$ puis pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Représenter $\Phi_{RS}(\theta)$. On pourra remarquer que \vec{B}_r est uniforme sur l'élément de surface $dS = \ell R d\alpha$.

B.I.2. En déduire la f.é.m. $e(t)$ induite au stator et la représenter. Préciser en particulier sa pulsation ω en fonction de la vitesse de rotation Ω de la machine.

B.I.3. Pour obtenir une force électromotrice induite $e(t)$ au stator en "marches d'escalier", qui s'approche d'une sinusoïde, il est nécessaire de répartir le bobinage rotorique dans des encoches distribuées de part et d'autre des encoches principales B et B' représentées sur la figure 13a.

Dans toute la suite on admettra que cette configuration est réalisée et que le champ rotorique en M s'écrit alors : $\vec{B}_r(M) = B_{r,max} \cdot \cos(\omega t - \alpha) \cdot \vec{u}_r$, pour α quelconque.

Montrer que la f.é.m. $e(t)$ s'exprime par : $e(t) = E_{max} \sin(\omega t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$ où E désigne la valeur efficace de $e(t)$. Déterminer E en fonction de N , S , $B_{r,max}$ et ω .

B.II. Alternateur diphasé

On cherche à obtenir au stator un champ \vec{B}_s tournant à la même vitesse angulaire Ω que le champ rotorique \vec{B}_r . Pour cela, on étudie un stator dit diphasé car il comporte deux bobines (ou phases) identiques à la bobine rotorique définie précédemment et décalées de $\pi/2$ dans l'espace (figure 14a) ; \vec{n}_1 , \vec{n}_2 représentent les normales respectives des bobines 11' et 22'. Sur le circuit électrique de la figure 14b, on a associé à la bobine 11' sa f.é.m. $e_1(t)$ que l'on peut éventuellement brancher sur une charge ; la charge représente l'ensemble des circuits électriques alimentés par la f.é.m. $e_1(t)$. On suppose toujours qu'à $t = 0$ $\theta = 0$.

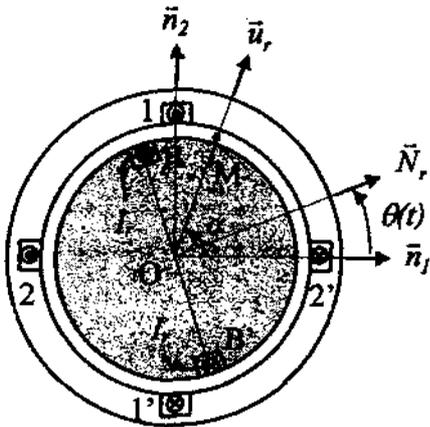


Figure 14a : face avant d'un alternateur diphasé

Figure 14b : circuit équivalent à la phase 1

B.II.1. Exprimer en fonction de E et de α les f.é.m. $e_1(t)$ et $e_2(t)$ apparaissant aux bornes des deux bobines lorsque le rotor tourne à la vitesse angulaire Ω .

B.II.2. Etude en charge

Lorsqu'on branche la même charge aux bornes des deux enroulements statoriques, des courants ayant même valeur efficace I et d'intensité $i_1(t)$ et $i_2(t)$ apparaissent. Des flux $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sont alors générés par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ à travers les N spires des deux enroulements. On appelle β la phase à l'origine de $i_1(t)$.

$$\begin{cases} i_1(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \\ i_2(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta - \pi/2) \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_1(t) = Li_1(t) + Mi_2(t) \\ \phi_2(t) = Mi_1(t) + Li_2(t) \end{cases}$$

L est l'inductance propre de chaque enroulement et M est la mutuelle inductance entre les deux enroulements.

On admet que le champ \vec{B}_1 en M créé par le bobinage 11' s'écrit :

$$\vec{B}_1 = ki_1(t)\cos(\alpha)\vec{u}_r = kI\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)\cos(\alpha)\vec{u}_r \text{ avec } k \text{ coefficient constant.}$$

a) Déterminer le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ envoyé par la bobine 11' dans la bobine 22'. Pour ce calcul on procédera comme au B.I.

b) En déduire la valeur de la mutuelle M et les expressions simplifiées de $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$.

B.II.3. Détermination du moment du couple électromagnétique

a) Par analogie avec l'expression de \vec{B}_1 , déterminer l'expression du champ \vec{B}_2 en M créé par le bobinage 22'.

b) Montrer que le champ statorique résultant $\vec{B}_s = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ s'écrit : $\vec{B}_s = B_s(\alpha, t) \vec{u}_s$, où $B_s(\alpha, t)$ est à déterminer. A quelle vitesse angulaire tourne ce champ ? Compte tenu des vitesses de rotation respectives de \vec{B}_1 et de \vec{B}_2 , on parle d'alternateur synchrone.

c) On associe au bobinage rotorique un moment magnétique \vec{M} colinéaire et de même sens que \vec{N} , d'expression $\vec{M} = N' I_r S \vec{N}$. On admet que le moment \vec{T}_{em} du couple électromagnétique s'exprime par $\vec{T}_{em} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{smax}$; \vec{B}_{smax} est obtenu pour un point M_0 défini par l'angle α_0 tel que la valeur algébrique $B_s(\alpha_0, t)$ est maximale à l'instant t de calcul considéré. Exprimer \vec{T}_{em} en fonction de k , N' , I , I_r , S , $\psi = \pi/2 - \beta$ et \vec{u} vecteur unitaire porté par l'axe de la machine et orienté vers l'avant. Par référence à la loi de Lenz, quel doit être le signe de $\sin \psi$? Quel est l'intervalle de définition de ψ ?

En réalité, lorsque $\psi > \pi/2$ le fonctionnement est *instable* ce qui se traduit par une *perte de synchronisme* de l'alternateur. Expliquer ces termes en supposant $\psi > \pi/2$ et en utilisant la relation $\vec{T}_{em} + \vec{T} = \vec{0}$ valable tant que la vitesse de rotation Ω est constante ; \vec{T} est le moment du couple de forces équivalent à l'ensemble des actions mécaniques exercées par l'hélice pour entraîner le rotor. On raisonnera à partir d'un "coup de vent" subi par l'éolienne.

Remarque :

L'alternateur diphasé décrit ci-dessus n'est pas très utilisé en pratique car la distribution électrique étant effectuée par un réseau triphasé, on préfère recourir à des alternateurs triphasés que l'on peut coupler au réseau. L'alternateur triphasé est constitué au stator de trois bobines dont les axes sont décalés de $2\pi/3$. Ce système est à même de générer un champ tournant au stator comme le système diphasé.

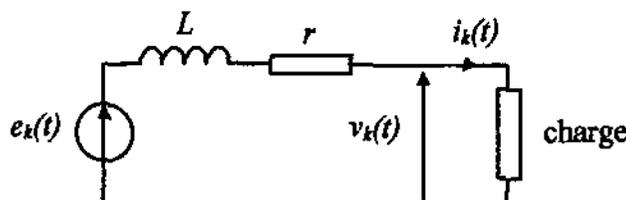
B.III. Bilan énergétique

B.III.1. Puissance sur l'arbre rotorique

Déterminer le travail élémentaire δW reçu par le rotor pour une rotation d'angle $d\theta$. En déduire la puissance P_r reçue par le rotor en fonction de T (norme de \vec{T}) et de la vitesse de rotation Ω .

B.III.2. Puissance électrique

D'après les résultats obtenus précédemment, le schéma électrique équivalent à une phase du stator lorsqu'on branche la même charge aux bornes des deux enroulements statoriques, est le suivant :



Dans ce schéma L représente l'inductance propre et r la résistance de l'enroulement. L'indice k représente la phase 1 ou la phase 2.

On a pour la phase 1 :

$e_1(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t)$; $i_1(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)$; $v_1(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta + \varphi)$; où $e_1(t)$ est la force électromotrice générée par la rotation du rotor, $i_1(t)$ le courant circulant dans le circuit, $v_1(t)$ la tension aux bornes de la charge.

a) Exprimer $e_2(t)$, $i_2(t)$, $v_2(t)$ pour la phase 2.

b) Exprimer la puissance instantanée $p_1(t)$ reçue par la charge de la phase 1.

c) On définit la puissance moyenne P_k reçue par la charge de la phase k par :

$$P_k = \frac{1}{T} \int_0^T p_k(t) dt \quad \text{avec } T \text{ période des grandeurs électriques.}$$

Montrer que $P_1 = P_2 = P$ que l'on exprimera en fonction de V , I et $\cos\varphi$. Quelle est la valeur de $\cos\varphi$ si la charge est une résistance R_{ch} ? une inductance L_{ch} ?

d) Déterminer la puissance moyenne $P(r)$ dissipée par r en fonction de r et I puis la puissance moyenne P_g fournie par le générateur $e_k(t)$ en fonction de E , I et $\cos\beta$. Que vaut la puissance moyenne dissipée par L ? Exprimer P en fonction de $P(r)$ et P_g .

B.III.3. Rendement de la conversion mécanique \rightarrow électrique

a) On définit le rendement de l'alternateur par : $\eta_a = \frac{2P}{P_r}$. Justifier cette définition. On

rappelle que P_r est la puissance reçue par le rotor d'origine mécanique.

On a par ailleurs l'égalité suivante : $P_r = 2P_g$. Que signifie cette égalité du point de vue de la transformation de la puissance reçue par le rotor en puissance électrique ?

b) Application numérique : $T=637 \text{ N.m}$; $\Omega=150 \text{ tr.min}^{-1}$; $V=230 \text{ V}$; $R_{ch}=11,5 \Omega$.

Déterminer la pulsation électrique ω puis la fréquence électrique f . La comparer à la fréquence du réseau E.D.F. et commenter.

Déterminer I , P_r , P , $P(r)$, r , η_a . Comparer η_a et $\eta_{h(max)}$ et conclure.