Approximations rationnelles.

Proposé par M.Lafforgue au lycée Blaise Pascal (2004-2005)

1) a) Montrer que si $(n+1)$ réels appartiennent à $[0,1]$, il en existe deux au moins dont la distance est $\leq \frac{1}{n}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \{1,2,...,n\}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $|qx-p| \leq \frac{1}{n}$.

Indication : Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{frac}(t) = t - E(t)$. Considérer les $\mathrm{frac}(kx)$, avec $k \in \{0,1,...,n\}$.

c) On suppose x irrationnel.

Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < |qx-p| \leq \frac{1}{q}$.

2) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs $q \in \mathbb{N}^*$ telles qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$.

Démontrer (par ailleurs) qu'il existe une constante K tel que $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{K}{q^2}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Problème de Sophie Germain.

On se propose de prouver qu'il n'existe pas de triplet $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$3 \text{ ne divise pas } xyz \quad \text{et} \quad x^3+y^3+z^3=0$$

On suppose désormais par l'absurde qu'il existe un tel triplet.

a) Montrer qu'on peut supposer $\mathrm{pgcd}(x,y,z)=1$, c'est-à-dire que x,y,z n'admettent aucun diviseur premier commun, et que dans ce cas, x,y,z sont deux à deux premiers entre eux.

b) Montrer qu'il existe deux entiers a et r tels que

$$y+z=a^3 \quad \text{et} \quad z^2-yz+y^2=r^3$$

Etablir l'existence de deux entiers b et c tels que $x+y=c^3$ et $x+z=b^3$.

c) Montrer que si m n'est pas divisible par 7, alors m^3 est congru à 1 ou -1 modulo 7.

En déduire qu'un et un seul des trois entiers x,y,z est divisible par 7. On supposera que c'est x.

d) Etablir successivement les congruences suivantes, toutes modulo 7 :

$$b^3+c^3-a^3 \equiv 0 \quad \text{et} \quad a \equiv 0 \quad \text{et} \quad y \equiv c^3 \quad \text{et} \quad r^3 \equiv 3y^2$$

Obtenir une contradiction et conclure.

Polygones inscrits dans le cercle unité et à coordonnées rationnelles.

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dont les coefficients a_k sont des entiers relatifs.

1) a) Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}[X]$ une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(2\cos x) = 2\cos nx$$

Soit $n \geq 1$. Donner une relation entre P_{n-1}, $X\ P_n$ et P_{n+1}.

b) Montrer que, pour $n \geq 1$, P_n est unitaire, de degré n et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

2) a) Soit x une racine rationnelle d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \geq 1$ et unitaire. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Indication : Poser $x = \frac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, en supposant p et q premiers entre eux.

b) Soit un réel θ. Montrer que si $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ et si $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$, alors $\cos\theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

3) a) On note $\mathcal{C}$ le cercle unité du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Vérifier que les points à coordonnées rationnelles de $\mathcal{C}$ forment une partie dense dans $\mathcal{C}$.

Indication : On pourra exprimer $e^{i\theta}$ en fonction de $\tan(\frac{\theta}{2})$.

Terminologie : On dit qu'une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ converge un point M de $\mathbb{R}^2$ ssi les suites de leurs coordonnées convergent vers les coordonnnées correspondantes du point M.

b) Déterminer les polygones réguliers (convexes) à n sommets de centre O inscrits dans $\mathcal{C}$, où $n \geq 3$, dont tous les sommets sont à coordonnées rationnelles.