Exercices de géométrie

1) Isobarycentre, centre du cercle circonscrit, orthocentre, centre du cercle inscrit d'un triangle.

Soient A, B, C trois points distincts du plan.
On note G l'isobarycentre de A, B et C, et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

a) On considère l'homothétie de centre G et de rapport -2. Montrer que l'image des médiatrices sont les hauteurs. En déduire que les hauteurs sont concourantes en un point H, appelé orthocentre de ABC.

b) On note A', B', C' les milieux des segments $[BC], [AC], [AB]$.
Montrer que le cercle circonscrit à $A'B'C'$ et son centre O' sont les images du cercle circonscrit à ABC et de son centre O par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ dont on précisera le centre.
Déduire des questions précédentes que les points O, G, H, O' sont alignés. Justifier que si le triangle n'est pas équilatéral, ces points sont distincts. La droite ainsi définie est appelée **droite d'Euler**.

2) On note I le centre du cercle inscrit dans ABC. On note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC.
On note J le point d'intersection de (AI) et de (BC).
Montrer que J est la barycentre de (B, b) et (C, c), c'est-à-dire que $AB/AC = JB/JC$.
En déduire que I est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

3) Soient ABC un triangle et M un point du plan.
On note P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites (AB), (AC) et (BC).
Montrer que les points P, Q, R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Terminologie : La droite (PQR) est appelée **droite de Simpson** associé à M dans le triangle ABC.

Indication : Justifier que M, P, B, R sont cocycliques. En déduire que angle(PR, PM) = angle(BC, BM) $[\pi]$.
Justifier que M, P, A, Q sont cocycliques. En déduire que angle(PQ, PM) = angle(AC, AM) $[\pi]$.
En conclure que angle(PQ, PM) = angle(PR, PM) $[\pi]$ ssi angle(AC, AM) = angle(BC, BM) $[\pi]$. Conclure.

4) (Concours général 1999). Soit ABC un triangle. On considère A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport aux côtés $(BC), (AC), (AB)$. On note O, G, H le centre du cercle circonscrit, l'isobarycentre et l'orthocentre de ABC.

a) On considère l'homothétie h de centre G et de rapport $\frac{1}{4}$. On note P, Q, R les images de A', B', C' par h.
Montrer que P, Q, R sont les projetés orthogonaux de $h(H)$ sur les côtés de ABC.

b) Déduire de 1) et 3) que les points A', B', C' sont alignés ssi la distance OH est égale au diamètre du cercle circonscrit.

5) On dit qu'un tétraèdre $ABCD$ est isocèle si et seulement si des arêtes opposées sont de même longueur, c'est-à-dire :

$$AB = CD, \quad AC = BD, \quad AD = BC$$

a) On considère dans le plan (ABC) le tétraèdre déplié : On note D', D'', D''' les points du plan (ABC) extérieurs au triangle ABC tels que les triangles ABD', ACD'', BCD''' sont semblables aux faces ABD, ACD, BCD du tétraèdre.

Montrer que $ABCD$ est isocèle si et seulement si A, B, C sont les milieux des segments $[D'D'']$, $[D'D''']$, $[D''D''']$.

b) Soit $ABCD$ un tétraèdre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Le tétraèdre $ABCD$ est isocèle.

ii) Les quatre faces du tétraèdre ont même périmètre.

iii) Les quatre faces du tétraèdre ont même aire.

iv) En tout sommet, la somme des angles aux trois faces qui le contiennent est π.

v) Les sphères inscrites et circonscrites au tétraèdre sont concentriques.