**Corrigé.**

**1)** a) Soient $z = a + \sqrt{2}b$ et $z' = c + \sqrt{2}d$ des éléments de $A$.

On a : $z + z' = (a + c) + \sqrt{2}(b + d) \in A$, $zz' = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(ad + bc) \in A$, $-z = (-a) + \sqrt{2}(-b) \in A$.

Comme de plus 0 et 1 appartiennent à $A$, alors $A = \mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

b) L'existence résulte de la définition de $A$. Supposons $z = a + \sqrt{2}b = c + \sqrt{2}d$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

On a alors $(a - c) = \sqrt{2}(d - c)$. Si $(d - c) \neq 0$, alors $\sqrt{2}$ serait rationnel. Donc $c = d$ et $a = b$. D'où l'unicité.

c) Soients $z = a + \sqrt{2}b$ et $z' = c + \sqrt{2}d \in A$.

On a $c(z)c(z') = a - \sqrt{2}b)(c - \sqrt{2}d) = (ac + 2bd) - \sqrt{2}(ad + bc)) = c(zz')$.

On en déduit $N(z)N(z') = c(z)zc(z')z' = (zz')c(zz') = N(zz')$.

d) Supposons que $a^2 - 2b^2 = \varepsilon \in \{-1, 1\}$. Alors $(a + \sqrt{2}b)(\varepsilon a - \varepsilon\sqrt{2}b) = 1$.

Comme $(\varepsilon a - \varepsilon\sqrt{2}b) \in A$, alors $a + \sqrt{2}b$ est inversible dans $A$.

Réciproquement, supposons $z = (a + \sqrt{2}b)$ inversible. Il existe $z' \in A$ tel que $zz' = 1$.

Donc $N(z)N(z') = N(zz') = 1$. Comme $N(z)$ et $N(z') \in \mathbb{Z}$, alors $N(z) = \pm 1$, c'est-à-dire $|a^2 - 2b^2| = 1$.

**2)** a) On a $I = \{N(z), z \in A\}$.

Comme $A$ est stable par produit et que $N(z)N(z') = N(zz')$, alors $I$ est stable par produit.

b) En se plaçant dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, on vérifie qu'un carré d'entier est toujours congru à 0 ,1 ou 4 modulo 8.

On en déduit que $a^2 - 2b^2$ est congru à $0, 1, 2, 4$ ou 6 modulo 8, donc $a^2 - 2b^2$ n'est pas congru à 3 modulo 8.

A fortiori, $3 \notin I$.

**3)** a) On a $p \in A$ et $\sqrt{2} - 1 \in A$. Comme $A$ est un anneau, alors $p(\sqrt{2} - 1)^n \in A$.

b) Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2} - 1)^n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\sqrt{2} - 1)^n \leq \varepsilon$. Posons $\alpha = (\sqrt{2} - 1)^n$. On a $0 < \alpha < \varepsilon$, et $\forall p \in \mathbb{N}$ $p\alpha \in A$.

On peut approcher tout réel $x$ par un multiple de $\alpha$, à $\alpha$ près, donc a fortiori à $\varepsilon$ près. Donc $A$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**4)** a) $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$.sont deux hyperboles admettant mêmes asymptotes $y = x/\sqrt{2}$ et $y = -x/\sqrt{2}$.

$\mathcal{H}^+$ admet $(Ox)$ comme axe focal, et $\mathcal{H}^-$ admet $(Oy)$ comme axe focal.

b) On a, avec les notations du 1), $(1 - \sqrt{2})^n = c(1 + \sqrt{2})^n = c((1 - \sqrt{2})^n) = a_n - \sqrt{2}b_n$.

(*Variante* : En utilisant la formule du binôme, on obtient $a_n = \sum_{k \text{ pair}} C_n^k 2^{k/n}$ et $b_n = \sum_{k \text{ impair}} C_n^k 2^{(k+1)/n}$, d'où $a_n - \sqrt{2}b_n = (1 - \sqrt{2})^n$ ).

Donc $(a_n)^2 - 2(b_n)^2 = (a_n + \sqrt{2}b_n)(a_n - \sqrt{2}b_n) = (1 - 2)^n = (-1)^n$. D'où $(a_n, b_n) \in \mathcal{H}$.

c) On résout le système $\begin{cases} x + 2y = X \\ x + y = Y \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2Y - X \\ y = X - Y \end{cases}$. Donc $\varphi$ est bijective, et $\varphi^{-1}(x, y) = (2y - x, x - y)$.

d) On a $(a_n + \sqrt{2}b_n)(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^{n+1} = (a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1})$.

On en déduit que $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ , c'est-à-dire $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \varphi((a_n, b_n))$.

**5)** a) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{H}$ tel que $(x, y) \neq (1, 0)$.

On a $(2y - x)^2 - 2(x - y)^2 = -(x^2 - 2y^2) = \pm 1$, donc $(2y - x, x - y) \in \mathcal{H}$.

Il est immédiat que $(2y - x, x - y) \in \mathbb{Z}^2$.

Reste donc à prouver que $2y - x$ et $x - y$ sont positifs, c'est-à-dire que $y \leq x \leq 2y$.

Or, on a : $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, donc $2y^2 - 1 \leq x^2 \leq 2y^2 + 1$.

Comme $(x, y) \neq (1, 0)$, alors $y \geq 1$. Donc $y^2 \geq 1$. Donc $y^2 \leq x^2 \leq 4y^2$. D'où $y \leq x \leq 2x$.

b) Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n, y_n) \neq (1, 0)$.

Par a), on en déduit par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{H}$.

En particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_{n+1} + y_{n+1}) = y_n < x_n + y_n$.

(en effet, si $(x, y) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{H}$ , on ne peut avoir $x$ nul car $2y^2 \neq 1$ ).

On en déduit donc que la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est absurde.

c) On sait que tout couple $(a_n, b_n)$ vérifie l'équation de Pell-Fermat.

Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|x^2 - 2y^2| = 1$.

Par b), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1, 0) = \varphi^{(-n)}((x, y))$, c'est-à-dire $(x, y) = \varphi^{(n)}((1, 0))$.

Comme $(1, 0) = (a_0, b_0)$, il résulte des questions précédentes que $(x, y) = (a_n, b_n)$.