Proposé par M.Lafforgue au lycée Blaise Pascal (2004-2005)

Equation de Pell-Fermat $|x^2 - 2y^2| = 1$. Méthode géométrique.

On considère $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad z = a + \sqrt{2}\, b \}$.

1) a) Montrer que le produit de deux éléments de A appartient encore à A.

b) Soit $z \in A$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $z = a + \sqrt{2}b$.

On pose désormais $c(z) = a - \sqrt{2}b$ et $N(z) = a^2 - 2b^2$.

c) Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.

d) Montrer que $a + \sqrt{2}b$ est inversible dans A ssi $N(z) = \pm 1$, c'est-à-dire ssi $|a^2 - 2b^2| = 1$.

2) On considère l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ \ n = a^2 - 2b^2\}$.

a) Montrer que I est stable par produit.

b) Montrer que 3 n'appartient pas à I.

Indication : On pourra considérer les congruences modulo 8.

3) a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(\sqrt{2} - 1)^n \in A$.

b) En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ l'unique couple d'entiers naturels tel que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$.

a) On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x^2 - 2y^2| = 1$.

On note $\mathcal{H}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}$ et $\mathcal{H}^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 = -1\}$.

On a ainsi $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{H}$.

b) Montrer que $(a_n, b_n) \in \mathcal{H}$.

c) On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \longmapsto (x + 2y, x + y)$.

Montrer que φ est bijective, et expliciter φ^{-1}.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ (a_{n+1}, b_{n+1}) = \varphi((a_n, b_n))$.

5) a) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{H}$ tel que $(x,y) \neq (1,0)$. Montrer que $(2y - x, x - y) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{H}$.

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{H}$. On définit la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} (x_0, y_0) = (x,y) \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ (x_{n+1}, y_{n+1}) = (2y_n - x_n, x_n - y_n) \end{cases}$

En utilisant a), montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x_n, y_n) = (1,0)$.

c) Démontrer que les $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant l'équation $|x^2 - 2y^2| = 1$ sont les couples (a_n, b_n), avec $n \in \mathbb{N}$.

Equation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) Soit d un entier naturel non carré.

a) Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

b) Montrer qu'il existe une infinité de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 < |x^2 - dy^2| \leq 1 + 2\sqrt{d}$.

c) Montrer qu'il existe un entier k non nul et deux couples (x,y) et $(x',y') \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$x^2 - dy^2 = k = (x')^2 - d(y')^2 \quad \text{et} \quad x \equiv x' \ [k] \quad \text{et} \quad y \equiv y' \ [k]$$

d) En considérant $(x' - y'\sqrt{d})(x + \sqrt{d}y)$, montrer qu'il existe un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $u^2 - dv^2 = 1$.

2) On note A l'ensemble des réels $x + \sqrt{d}y$, où $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 - dy^2 = 1$.

a) On pose $G = A \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que G est stable par produit et par passage à l'inverse.

b) Montrer que tout élément $z \in G$ qui est strictement supérieur à 1 est supérieur ou égal à $1 + \sqrt{d}$.

c) Montrer l'existence d'un unique réel $\omega \in G$ tel que $\omega > 1$ et $G = \{\omega^n, \ n \in \mathbb{Z}\}$. Qu'en déduire pour A ?

d) Déterminer ω dans les deux cas $d = 2$ et $d = 3$.

e) Expliciter les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.