Proposé par M.Lafforgue au lycée Blaise Pascal (2004-2005)

6.10. POLYNOMES SYMÉTRIQUES

6.10.*1*. Polynômes invariants par un sous groupe G du groupe $\mathfrak{S}_n$

Cette étude utilise la définition d'un groupe opérant sur un ensemble (2.5.*1*, 1°).

1° Proposition. — **Etant donné un élément σ du groupe symétrique de degré n, $\mathfrak{S}_n$, l'application de $A[X_1, ..., X_n]$ dans $A[X_1, ..., X_n]$ qui à tout polynôme P fait correspondre le polynôme noté $\sigma(P)$ défini par $\sigma(P)(X_1, ..., X_n) = P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})$ est un automorphisme d'algèbre.**

L'application qui à tout couple (σ, P) constitué d'un élément de $\mathfrak{S}_n$ et d'un polynôme de $A[X_1, ..., X_n]$ fait correspondre le polynôme $\sigma(P)$ est une opération du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1, ..., X_n]$. Enfin si P est p-homogène, $\sigma(P)$ est p-homogène.

Le polynôme $\sigma(P)$ est obtenu en substituant aux n indéterminées $X_1, ..., X_n$ les n polynômes $X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}$.

Si $\quad P = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad$ alors $\quad \sigma(P) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X_{\sigma(1)}^{i_1} \dots X_{\sigma(n)}^{i_n}.$

On vérifie en utilisant 6.7.*10* :

$$\sigma(P+Q) = \sigma(P) + \sigma(Q), \qquad \sigma(aP) = a\sigma(P),$$
$$\sigma(P \cdot Q) = \sigma(P) \cdot \sigma(Q) \qquad \sigma(1) = 1.$$

ce qui montre que l'application $(P) \longmapsto \sigma(P)$ est un endomorphisme de A-algèbre. La vérification du caractère bijectif est immédiate.

D'autre part, étant donnés deux éléments σ et τ de $\mathfrak{S}_n$ et un polynôme P :

$$\tau[\sigma(P)] = \tau[P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})] = P(X_{\tau\circ\sigma(1)}, ..., X_{\tau\circ\sigma(n)})$$

donc
$$\tau[\sigma(P)] = (\tau \circ \sigma)(P).$$

Enfin si e est l'identité de $\mathfrak{S}_n$, $e(P) = P$, ce qui montre que $\mathfrak{S}_n$ opère sur $A[X_1, ..., X_n]$.

La dernière propriété est immédiate. □

2° Définition. — **Etant donné un sous-groupe G de $\mathfrak{S}_n$, un polynôme P de $A[X_1, ..., X_n]$ est dit invariant par G si pour tout élément σ de G, on a $\sigma(P) = P$.**

L'ensemble des polynômes invariants par G est noté $\mathcal{T}_G$; c'est manifestement une sous-algèbre de $A[X_1, ..., X_n]$. En particulier nous avons les deux sous-algèbres $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}_n}$ *algèbre des polynômes alternés* (invariants par le groupe alterné), $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_n}$ *algèbre des polynômes symétriques* (invariants par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$).

Remarques. — *a*) $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_n}$ est inclus dans $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}_n}$ mais la réciproque est inexacte car le polynôme $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$ est un polynôme alterné sans être un polynôme symétrique lorsque K est de caractéristique différente de 2.

b) Pour qu'un polynôme P appartienne à $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_n}$ il faut et il suffit que pour toute transposition τ de $\mathfrak{S}_n$ on ait $\tau(P) = P$ (en effet $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble des transpositions).

6.10.*2*. Polynômes symétriques élémentaires

1° Théorème et définition. — **Dans $A[X_1, ..., X_n]$ les n polynômes Σ_p, $(1 \leqslant p \leqslant n)$ définis par :**

$$\Sigma_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} X_{i_1} \dots X_{i_p}$$

sont symétriques et portent le nom de polynômes symétriques élémentaires.

Soit P le polynôme de $A[X_1, ..., X_n, Y]$:

$$P = \prod_{i=1}^{n} (Y - X_i).$$

Par récurrence sur l'entier n on prouve :

$$P = Y^n + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \Sigma_p Y^{n-p}.$$

Or pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a manifestement :

$$\prod_{i=1}^{n} (Y - X_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^{n} (Y - X_i)$$

(commutativité du produit dans $A[X_1, ..., X_n, Y]$).

On en déduit $\sigma(\Sigma_p) = \Sigma_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$. □

Notons que $\Sigma_1 = X_1 + ... + X_n$, que $\Sigma_n = X_1 ... X_n$ et que Σ_p est la somme de C_n^p monômes. Par abus, afin d'éviter des indexations assez lourdes, nous noterons, toutes les fois que le contexte sera sans ambiguïté :

$$\Sigma X_{i_1} \dots X_{i_p} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} X_{i_1} \dots X_{i_p}.$$

Exemple : $\Sigma X_i X_j$ est le polynôme $\Sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_i X_j$.

Remarquons aussi que Σ_p est p-homogène et que le degré partiel de Σ_p par rapport à chaque indéterminée est 1.

Proposé par M.Lafforgue au lycée Blaise Pascal (2004-2005)

2° ***Poids d'un monôme, d'un polynôme de*** $A[Y_1, ..., Y_n]$. — DÉFINITION. — **On appelle poids du monôme** $Y_1^{i_1}...Y_n^{i_n}$ **l'entier** $\sum_{k=1}^{k=n} ki_k$.

Si
$$P = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i Y_1^{i_1}...Y_n^{i_n}$$
n'est pas nul l'ensemble :
$$\left\{ m \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, i \in \mathbb{N}^n \ (a_i \neq 0) \wedge \left(\sum_{k=1}^{k=n} ki_k = m \right) \right\}$$
des poids des monômes $Y_1^{i_1}...Y_n^{i_n}$ **tels que le coefficient** a_i **appartienne au support de** P**, admet un plus grand élément qui est dit poids du polynôme** P **et noté** $\pi(P)$.

Si P **est nul, on convient** $\pi(P) = -\infty$.

La famille $\{i \in \mathbb{N}^n \,|\, a_i \neq 0\}$ est en effet finie et non vide ce qui assure l'existence de $\pi(P)$ lorsque P est non nul. □

PROPOSITION. — **Si** $P \in A[Y_1, ..., Y_n]$ **est de poids** $\pi(P)$**, alors** $P(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$**, polynôme de** $A[X_1, ..., X_n]$ **obtenu par substitution des** n **polynômes** $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$ **aux** n **indéterminées** $Y_1, ..., Y_n$**, est de degré au plus** $\pi(P)$.

En effet si $Y_1^{i_1}...Y_n^{i_n}$ est de poids p, $(\Sigma_1)^{i_1}...(\Sigma_n)^{i_n}$ est manifestement p-homogène par application de 6.7.8, 2°. □

3° ***Ordre d'un polynôme symétrique.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit** P **un polynôme symétrique de** $A[X_1, ..., X_n]$ **;** P **a même degré partiel par rapport à chaque indéterminée. Ce degré partiel s'appelle ordre de** P **et est noté** $\omega(P)$.

Si $P = 0$ le résultat est évident. Soit $P \neq 0$; si $p_1 = \deg_{X_1}(P)$, P contient un monôme $a_p X_1^{p_1}...X_n^{p_n}$ avec $a_p \neq 0$. En utilisant la transposition $\tau = (1, i)$ on constate que P contient le monôme :
$$a_p X_i^{p_1}...X_{\tau(n)}^{p_n} \quad \text{donc} \quad \deg_{X_i}(P) \geqslant \deg_{X_1}(P).$$
Une démonstration analogue montre : $\deg_{X_1}(P) \geqslant \deg_{X_i}(P)$. □

PROPOSITION. — **Si** $P \in A[Y_1, ..., Y_n]$ **est de degré** k**, le polynôme symétrique** $P(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ **de** $A[X_1, ..., X_n]$ **est d'ordre au plus** k.

La vérification de cette propriété est immédiate. □

6.10.3. Structure des polynômes symétriques

1° Nous aurons à utiliser :

LEMME. — **Soit** $P \in A[X_1, ..., X_n]$ **tel qu'en substituant 0 à l'une quelconque des indéterminées dans** $P(X_1, ..., X_n)$ **on obtienne le polynôme nul. Alors** P **est divisible par** $\Sigma_n = X_1 ... X_n$.

Posons :
$$P = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$$

A tout $k \in \mathbb{N}_n$ associons l'ensemble I_k des n-uples $i = (i_1, ..., i_n)$ de $\mathbb{N}^n$ tels que $i_k = 0$. On a l'égalité de polynômes :
$$P(X_1, ..., X_{k-1}, 0, X_{k+1}, ..., X_n) = \sum_{i \in I_k} a_i X_1^{i_1}...X_{k-1}^{i_{k-1}} X_{k+1}^{i_{k+1}}...X_n^{i_n}$$

La nullité du polynôme $P(X_1, ..., X_{k-1}, 0, X_{k+1}, ..., X_n)$ exige
$$\forall\, i \in I_k \qquad a_i = 0.$$

En faisant successivement $k = 1, ..., k = n$, on en déduit que a_i est nul pour tout n-uplet i dont l'un des éléments est nul. Autrement dit $a_i \neq 0$ exige $i \in (\mathbb{N}^*)^n$ et on peut écrire :
$$P = \sum_{i \in (\mathbb{N}^*)^n} a_i X_1^{i_1}...X_n^{i_n} = X_1...X_n \Big(\sum_{i \in (\mathbb{N}^*)^n} a_i X_1^{i_1 - 1}...X_n^{i_n - 1} \Big) \qquad □$$

THÉORÈME I — **A tout polynôme** $P \in A[X_1, ..., X_n]$ **symétrique de degré** p**, on peut associer un polynôme** $Q \in A[Y_1, ..., Y_n]$ **de poids inférieur ou égal à** p **tel que** $P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$.

Eliminons le cas du polynôme $P = 0$, auquel on peut associer le polynôme $Q = 0$. Il s'agit donc de vérifier une assertion de la forme $\mathcal{A}_{n,p}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Nous allons utiliser une double récurrence.

- $\mathcal{A}_{1,p}$ est vraie pour tout p : à tout polynôme $P(X_1)$ on peut associer $Q(Y_1) = P(X_1)$.
- Ayant fixé n, tel que $n \geqslant 2$, supposons que $\mathcal{A}_{n-1,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ et démontrons, par récurrence sur p, que $\mathcal{A}_{n,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

— $\mathcal{A}_{n,0}$ est évidemment vraie.

— Supposons $\mathcal{A}_{n,k}$ vérifiée pour tout $k < p$ et soit P un polynôme symétrique de $A[X_1, ..., X_n]$ de degré p.

Notons pour q tel que $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $(\Sigma_q)_0$ le polynôme obtenu en substituant 0 à X_n dans Σ_q. Le lecteur vérifiera sans difficulté, par exemple en utilisant $\prod_{i=1}^{i=n} (Y - X_i)$, que $(\Sigma_q)_0$ n'est autre que le q-ième polynôme symétrique élémentaire de $A[X_1, ..., X_{n-1}]$. Considérons alors $P(X_1, ..., X_{n-1}, 0)$; il est manifestement symétrique, de degré au plus p. En utilisant $\mathcal{A}_{n-1,k}$ on peut écrire :
$$P(X_1, ..., X_{n-1}, 0) = Q_1((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_{n-1})_0)$$
où $Q_1 \in A[Y_1, ..., Y_{n-1}]$ est de poids au plus p. Posons :
$$P_1(X_1, ..., X_n) = P(X_1, ..., X_n) - Q_1(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}).$$

Proposé par M.Lafforgue au lycée Blaise Pascal (2004-2005)

Le polynôme P_1, manifestement symétrique, est de degré au plus p (proposition 6.10.2, 2°) ; or par construction $P_1(X_1, ..., X_{n-1}, 0) = 0$ et, puisque P_1 est symétrique, pour tout k de $\mathbb{N}_n$:

$$P_1(X_1, ..., X_{k-1}, 0, X_k, ..., X_n) = 0.$$

D'après le lemme il existe P_2 de $A[X_1, ..., X_n]$ tel que :

$$P_1(X_1, ..., X_n) = \Sigma_n \cdot P_2(X_1, ..., X_n).$$

P_1 et Σ_n sont symétriques ; soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$, on a :

$$\Sigma_n \cdot (P_2(X_1, ..., X_n) - P_2(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})) = 0.$$

On en déduit sans aucune hypothèse sur A :

$$P_2(X_1, ..., X_n) - P_2(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) = 0.$$

De plus on constate : $\deg(P_2) \leqslant p-n$.

Ainsi P_2 est symétrique, de degré k tel que $k < p$; appliquons à P_2 l'hypothèse de récurrence :

$$P_2(X_1, ..., X_n) = Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$$

où $Q_2 \in A[Y_1, ..., Y_n]$ et où Q_2 est de poids au plus $p-n$. Il vient :

$$P(X_1, ..., X_n) = Q_1(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}) + \Sigma_n \cdot Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n).$$

Le polynôme $Q_1(Y_1, ..., Y_{n-1}) + Y_n Q_2(Y_1, ..., Y_n)$ est de poids au plus p et répond manifestement à la question. □

REMARQUE. — On peut même ajouter dans ce théorème que Q est de degré inférieur ou égal à l'ordre $\omega(P)$ de P. En effet en rajoutant cette propriété à l'assertion $\mathcal{A}_{n,p}$ et en reprenant la démonstration par récurrence on constate successivement :

— $P(X_1, ..., X_{n-1}, 0)$ est d'ordre au plus $\omega(P)$ donc Q_1 est de degré au plus $\omega(P)$.

— P_1 est d'ordre au plus $\omega(P)$.

— P_2 est d'ordre au plus $\omega(P)-1$ donc Q_2 est de degré au plus $\omega(P)-1$ et donc Q est de degré au plus $\omega(P)$.

2° THÉORÈME II. — **Soit P un polynôme symétrique de $A[X_1, ..., X_n]$ de degré p et d'ordre ω. Il existe un unique polynôme Q de $A[Y_1, ..., Y_n]$ tel que $P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$. Ce polynôme Q est de poids p et de degré ω.**

Unicité de Q. — Il suffit de démontrer que si Q est un polynôme de $A[Y_1, ..., Y_n]$ tel que $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$ alors $Q = 0$.

Démontrons ce résultat par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 1$ puisque $\Sigma_1 = X_1$. Supposons le résultat établi pour $n-1$ avec

$n \geqslant 2$ et soit Q un polynôme de $A[Y_1, ..., Y_n]$ tel que $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$; Q s'écrit :

$$Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k Y_n^k$$

avec $Q_k \in A[Y_1, ..., Y_{n-1}]$.

Si Q est non nul il existe un plus petit entier l, tel que $Q_l \neq 0$.

$$Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = (\Sigma_n)^l \sum_{k \geqslant l} Q_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}) (\Sigma_n)^{k-l}$$

La nullité de ce polynôme implique (sans hypothèse sur A) :

$$\sum_{k \geqslant l} Q_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}) (\Sigma_n)^{k-l} = 0.$$

En substituant 0 à X_n on obtient :

$$Q_l((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_{n-1})_0) = 0$$

qui entraîne d'après l'hypothèse de récurrence $Q_l = 0$. Ainsi l'hypothèse $Q = 0$ est absurde. □

Existence de Q. — D'après le théorème I, il existe un polynôme Q de poids au plus p, de degré au plus ω répondant à la question. Mais si p' et ω' sont le poids et le degré de Q on sait que le degré de P est alors au plus p' et son ordre au plus ω' (6.10.2, 2° et 6.10.2, 3°). Il en résulte $p = p'$ et $\omega = \omega'$. □

REMARQUE. — Soit $Q \in A[Y_1, ..., Y_n]$. En désignant par Q_k la somme des monômes de poids k, on peut écrire $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ où Q_k est soit nul, soit de poids k. Il en résulte :

$$Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_n).$$

$Q_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ est un polynôme k-homogène. Il en résulte (unicité de la décomposition en polynômes homogènes) que $Q_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ est la composante de P sur M_k (6.7.8, 3°). En particulier si P est p-homogène, tous les monômes de Q ont pour poids p.

6.10.4. Détermination pratique du polynôme Q satisfaisant à $P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$, P étant symétrique

P étant un polynôme symétrique de $A[X_1, ..., X_n]$, pour déterminer Q on peut procéder par identification ou par l'utilisation des formules de Newton (que l'on verra en 6.10.5) ; cependant il existe un procédé systématique de détermination de Q que nous allons exposer sur un polynôme P non nul, symétrique et homogène.

$$P = \sum_{|i| = p} a_i X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

Proposé par M.Laffargue au lycée Blaise Pascal (2004-2005)

$\mathbb{N}^n$ étant totalement ordonné par l'ordre lexicographique désignons par k le n-uplet le plus grand tel que $a_i \neq 0$ (nous dirons que k est le degré de P pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^n$). Nécessairement si $k = (k_1, ..., k_n)$ nous avons les inégalités : $k_1 \geqslant k_2 \geqslant ... \geqslant k_n$; en effet dans le cas contraire s'il existait $k_i < k_{i+1}$, la transposition $(i, i+1)$ montrerait l'existence dans P du monôme $a_k X_1^{k_1} .. X_{i+1}^{k_i} X_i^{k_{i+1}} ... X_n^{k_n}$ avec $a_k \neq 0$.

Or $(k_1, ..., k_{i+1}, k_i, ..., k_n)$ est un n-uplet strictement supérieur à k ce qui est absurde.

Formons alors :

$$P - a_k(\Sigma_1)^{k_1-k_2}(\Sigma_2)^{k_2-k_3}...(\Sigma_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(\Sigma_n)^{k_n}$$

On vérifie que :

— ce polynôme est symétrique, homogène ;

— le monôme $a_k X_1^{k_1}...X_n^{k_n}$ ne figure plus dans ce polynôme ;

— ce polynôme est nul ou de degré pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^n$ strictement inférieur à k.

S'il est nul le problème est terminé, dans le cas contraire on recommence l'opération précédente et il est manifeste qu'en un nombre fini d'opérations le polynôme trouvé est nul puisque la suite des degrés pour l'ordre lexicographique décroît strictement.

Remarque. — Il est parfois prudent, pour éviter des erreurs, de compter le nombre de monômes intervenant dans chaque membre d'une égalité ; cela peut permettre d'éviter l'oubli de certains coefficients multiplicatifs qui peuvent intervenir.

Exemple 1. — *Exprimer dans* $A[X_1, X_2, X_3]$, $P = \sum_{i \neq j} X_i^2 X_j$ *à l'aide des polynômes symétriques élémentaires* $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Procédons par identification. P est de degré 3, d'ordre 2 donc Q est de poids 3, de degré 2. L'équation

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 = 3$$

a pour solutions $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(3, 0, 0)$ ce qui conduit aux monômes Y_3, Y_1Y_2, Y_1^3 ; Y_1^3 est à éliminer pour des questions de degré. Ainsi $Q(Y_1, Y_2, Y_3) = \alpha Y_1 Y_2 + \beta Y_3$ et donc :

$$\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j = \alpha \Sigma_1 \Sigma_2 + \beta \Sigma_3, \quad (\alpha, \beta) \in A^2$$

En substituant 0 à X_3, il vient $\alpha = 1$.

Si l'on donne à X_1, X_2, X_3 les trois valeurs égales 1, il vient $\beta = -3$

donc
$$\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j = \Sigma_1 \Sigma_2 - 3\Sigma_3.$$

Exemple 2. — *Dans* $A[X_1, ..., X_n]$ *avec* $n \geqslant 4$, *expression de* $P = \sum_{i \neq j} X_i^3 X_j$.

Le monôme de plus haut degré pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^n$ est $X_1^3 X_2$.

Formons
$$P - (\Sigma_1)^2 \Sigma_2 = \sum_{i \neq j} X_i^3 X_j - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \left(\sum_{i<j} X_i X_j\right).$$

Cette différence a pour expression : $-\sum_{i \neq j \wedge i \neq k \wedge j<k} X_i^2 X_j X_k - 2(\Sigma_2)^2$.

Prenons l'expression $\sum_{i \neq j \wedge i \neq k \wedge j<k} X_i^2 X_j X_k$, son monôme de plus haut degré (pour l'ordre lexicographique) est $X_1^2 X_2 X_3$, retranchons $\Sigma_1 \Sigma_3$; on obtient : $\Sigma X_i^2 X_j X_k - \Sigma_1 \Sigma_3 = -4\Sigma_4$.

Ainsi
$$\sum_{i \neq j} X_i^3 X_j = (\Sigma_1)^2 \Sigma_2 - 2(\Sigma_2)^2 - \Sigma_1 \Sigma_3 + 4\Sigma_4.$$

Exemple 3. — *Dans* $A[X_1, ..., X_n]$ *avec* $n \geqslant 4$, *expression de* $\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} X_i^2 X_j^2$.

Le monôme de plus haut degré est $X_1^2 X_2^2$. Retranchons donc $(\Sigma_2)^2$;

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} X_i^2 X_j^2 - (\Sigma_2)^2 = -6 \sum_{i<j<k<l} X_i X_j X_k X_l - 2 \sum_{i \neq j \wedge i \neq k \wedge j<k} X_i^2 X_j X_k.$$

En utilisant le calcul fait dans l'exemple 2 : $\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} X_i^2 X_j^2 = (\Sigma_2)^2 - 2\Sigma_1 \Sigma_3 + 2\Sigma_4$.

6.10.5. Formules de Newton

Etant donné un polynôme symétrique P, la détermination du polynôme Q tel que $P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ n'est pas toujours aussi simple que dans les exemples précédents, en particulier lorsque le degré du polynôme P est élevé. Aussi utilise-t-on souvent comme intermédiaires dans les calculs la famille de polynômes symétriques et homogènes $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définis par $S_k = \sum_{p=0}^{p=n} X_p^k$; remarquons que $S_0 = n$, et que $S_1 = \Sigma_1$.

Théorème. — **Les polynômes symétriques et homogènes** $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **de** $A[X_1, ..., X_n]$, **où** A **est un anneau commutatif, vérifient les relations suivantes :**

i) **pour** $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \Sigma_2 S_{k-2} + ... + (-1)^p \Sigma_p S_{k-p} + ... + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k k \Sigma_k = 0.$$

ii) **pour** $k \geqslant n$:

$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + ... + (-1)^p \Sigma_p S_{k-p} + ... + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1} S_{k-n+1} + (-1)^n \Sigma_n S_{k-n} = 0.$$

Ces relations portent le nom de formules de Newton.

Rappelons tout d'abord que dans $A[X_1, ..., X_n, Y]$, anneau des polynômes à $(n+1)$ indéterminées sur A, le polynôme $P = \prod_{i=1}^n (Y - X_i)$ a pour expression :

$$P = Y^n + \sum_{p=1}^n (-1)^p \Sigma_p Y^{n-p} \quad (6.10.2.1°)$$

i) On peut écrire ; $\dfrac{\partial P}{\partial Y} = \sum_{i=1}^n \dfrac{P}{(Y - X_i)}$ en remarquant qu'il s'agit ici d'une égalité de polynômes $\left(\text{la notation } \dfrac{P}{Y - X_i} \text{ est plus simple que } \prod_{1 \leqslant j \leqslant n \wedge i \neq j} (Y - X_j)\right)$.

D'autre part, en utilisant l'expression de P :

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = nY^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p (n-p) \Sigma_p Y^{n-p-1}.$$