Exercices de Khôlles de Mathématiques, premier trimestre

Lycée Louis-Le-Grand, Paris, France

Igor Kortchemski

HX 2 - 2005/2006

Exercices particulièrement intéressants :
- Exercice 4.1.
- Exercice 5.1.
- Exercices 6.2, 6.3, 6.4.
- Exercice 8.2.
- Exercice 10.1.
- Exercice 11.3, 11.4.

Table des matières

1 Semaine 1 - Ensembles, relations, applications

Khôlleur : Mme. Zamaroczy.

Etonnamment, il n'y a pas eu de calculs inhumains avec Mme. Zamaroczy, mais ça va venir ...

Exercice 1.1. *Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit l'application ϕ de la manière suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathfrak{P}(E) & \rightarrow & \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. *Trouver une condition pour que ϕ soit injective.*
2. *Trouver une condition pour que ϕ soit surjective.*

Il était sous-entendu que ces conditions devaient être des CNS.

Solution

Exercice 1.2. *Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On définit sur $\mathbb{P}$ la relation binaire R suivante :*

$$aRb \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \text{ est un nombre premier.}$$

R est-elle une relation d'équivalence ?

Solution

Exercice 1.3. *Quel est le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments ?*

Solution

---

2 Semaine 2 - Réels, fonctions usuelles

Khôlleur: Mlle. Gicquel.

Exercice 2.1. *Soient f et g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que $Max(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution

Exercice 2.2 (Exo à stûce)**.** *Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2 \dots y_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Montrer que*[1] *:*

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Solution

Exercice 2.3. *Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

Solution

Exercice 2.4. *Trouver tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.*

Solution

Exercice 2.5 (C'est un exo de khôlle ça ?)**.** *Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Factoriser :*

$$1 - cos(\alpha) + cos(\beta) + cos(\gamma).$$

Solution

---

[1] sans l'inégalité du réordonnement...

3 Semaine 3 - Complexes, équations différentielles du premier ordre

Khôlleur: M. Houdayer.

Exercice 3.1 (Question de cours)**.** *En quoi consiste la méthode de la variation de la constante ?*

Exercice 3.2 (Oral X)**.** *Trouver toutes les fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *l'on ait :*

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt = f(x)f(y).$$

Solution

---

4 Semaine 4 - Équations différentielles du second ordre, géométrie plane

Khôlleur: Mme. Miquel.

Exercice 4.1 (Enfin un exo intéressant)**.** *Montrer qu'il n'existe pas de partition du plan en cercles.*

∗ *On utilisera le théorème des segments emboités :*
Soit une suite de segments emboités : $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ *telle que* $\lim\limits_{+\infty} a_n - b_n = 0$.
Alors il existe l *tel que* $\lim a_n = \lim b_n = l$.

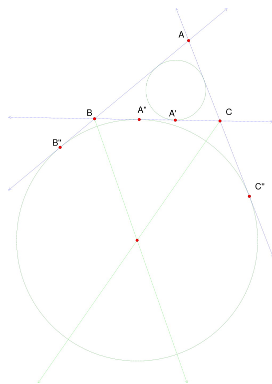
- *Montrer qu'il existe une suite* $(\mathfrak{C}_n)$ *de cercles (*C_n *est le centre du cercle* $\mathfrak{C}_n$ *et* r_n *est son rayon) telle que* $\mathfrak{C}_{n+1}$ *soit strictement inclus dans* $\mathfrak{C}_n$ *et que* $r_{n+1} \leq \dfrac{r_n}{2}$.
- *Montrer qu'alors* C_n *converge.*
- *Prouver qu'il n'existe pas de partition du plan en cercles.*

Solution

Exercice 4.2. *Soit* ABC *un triangle. Considérons le cercle exinscrit tangent au côté* $[BC]$ *en* A''*, autrement dit le cercle dont le centre est l'intersection des bissectrices extérieures des angles* $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{BCA}$ *et qui est tangent au côté* $[BC]$ *en* A''*. Il est tangent à* (AB) *en* B'' *et à* (AC) *en* C'' *(voir figure).*

1. *Montrer que* AB'' *est égale à la valeur du demi-périmètre de* ABC.
2. *Soit* A' *le point de contact du cercle inscrit à* ABC *avec* $[BC]$*. Prouver que* $[BC]$ *et* $[A''A']$ *ont même milieu.*

Solution



5 Semaine 5 - Courbes paramétrées (non polaires)

Khôlleur : M. Tauzin.

Exercice 5.1 (Courbes elliptiques)**.** *Le but de cet exercice est d'étudier quelques propiétés des courbes elliptiques. Soient a, b, c des réels et soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.*

- *On cherche tous les points de coordonnées (x, y) qui vérifient $y^2 = P(x)$. Suivant les différentes valeurs de a, b, c tracer la courbe $\mathfrak{C}$ de ces points.*

On étudie les cas non dégénérés :

- *On se place dans le cas où P n'admet qu'une racine simple α (voir figure 1). Paramétriser l'ensemble des points de $\mathfrak{C}$ sur $\mathbb{R}$ en découpant $\mathbb{R}$ en deux intervalles.*

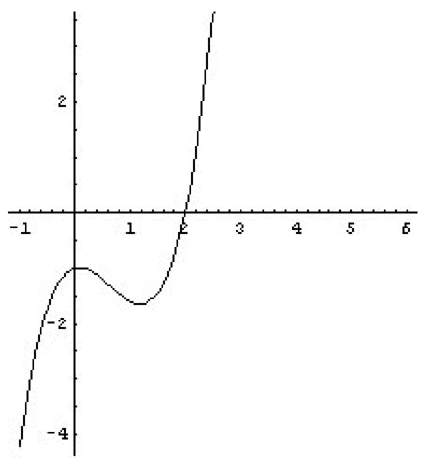


FIG. 1 – P n'admet qu'une racine simple α

- *On se place dans le cas où P admet une racine simple β et une racine double $\alpha > \beta$ (voir figure 2).*
  * *Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathfrak{C}$ au point point $x = \beta$, puis $x = \alpha$.*
  * *En fait, dans ce cas la courbe $\mathfrak{C}$ est une courbe continue admettant un point double. Vérifier cela en paramétrisant $\mathfrak{C}$ rationnellement : trouver deux polynômes à coefficients réels Q, R tels que $x(t) = Q(t)$ et $y(t) = R(t)$. On pourra écrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x - \beta)(x - \alpha)^2$ et s'inspirer des variations de $x(t)$ pour intuiter le degré de Q.*

Solution

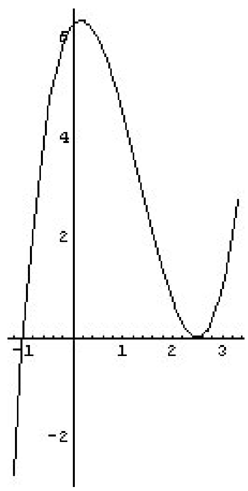


FIG. 2 – P admet une racine simple β et une racine double $\alpha > \beta$

6 Semaine 6 - Courbes paramétrées polaires, coniques

Khôlleur : M. Sage.

Exercice 6.1 (Question de cours)**.** *On considère une conique définie analytiquement par $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ex+F=0$. Montrer qu'il existe un nouveau repère dans lequel le terme croisé a disparu.*

Exercice 6.2. *On considère la parabole définie par $Y^2=pX$. Un rayon arrive de l'infini et se réfléchit sur la parabole de sorte que l'angle formé par le rayon incident et la tangente au point d'incidence à la parabole soit égal à l'angle formé par le rayon réfléchi et cette tangente (voir figure 3).Montrer de manière non bourrine que le rayon réfléchi passe par F, le foyer de la parabole.*

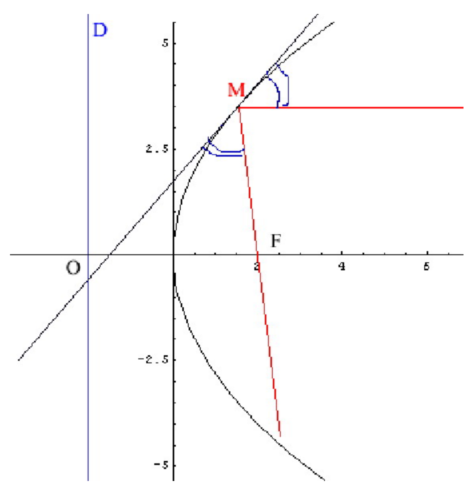


FIG. 3 –

Solution

Exercice 6.3. *On considère la parabole définie par $Y^2 = 2pX$. Une droite passant par F, le foyer de la parabole, recoupe cette dernière en M et en M'. Montrer en n'utilisant que des arguments géométriques que la quantité $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FM'}$ ne dépend pas de la droite choisie (voir figure 4). On pourra notamment calculer l'aire d'un trapèze de deux manières différents pour en déduire FM.*

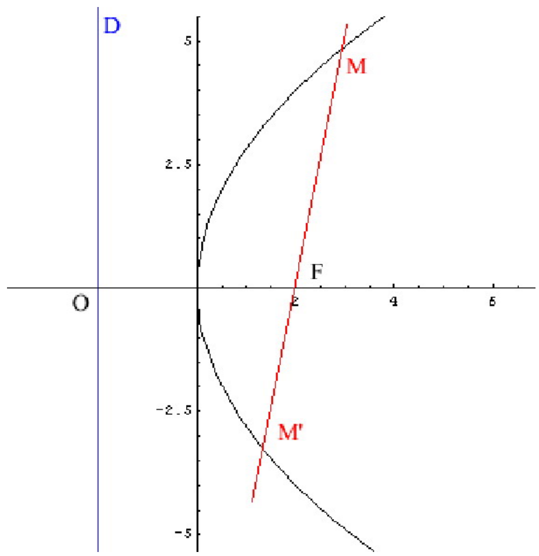


FIG. 4 –

Solution

Exercice 6.4. *On considère la parabole définie par $Y = X^2$. Soient A, B, C, D des points appartenant à cette parabole d'abcisses respectives x_1, x_2, x_3, x_4. Trouver une condition nécéssaire et suffisante sur x_1, x_2, x_3, x_4 pour que A, B, C, D soient cocycliques.*

- *On écrira l'équation générale d'un cercle et on dira que x_1, x_2, x_3, x_4 vérifient les relations coeffecients/racines de ce polynôme degré 4.*
- *On pose :*

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= x_1x_2x_3x_4 \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4.
\end{aligned}$$

  Que vérifie donc σ_1 ?
- *Montrer qu'en fait c'est une condition suffisante en remarquant que cela revient à montrer une inégalité entre σ_1, les coordonnées du centre du cercle ainsi que son rayon. Montrer cette inégalité. On pourra montrer une inégalité plus forte en négligeant un ou deux termes par-ci par-là et voir que c'est en fait plus simple[2].*

Solution

[2] Mouarf, on se croirait en chimie.

7 Semaine 7 - Suites, structures algébriques

Khôlleur : Mme. Zamaroczy.

Exercice 7.1. *Soit u_0 un réel strictement positif. Etudier la convergence de la suite définie de la manière suivante :*

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}.$$

Solution

Exercice 7.2 (Moitié question de cours)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les conditions suivantes :*
- *(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante*
- $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. On montrera notamment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Solution

Exercice 7.3. *On considère T la loi suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$xTy = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}.$$

Montrer que $\mathbb{R}$ muni de T forme un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Solution

---

8 Semaine 8 - Polynômes

Khôlleur : Mme. Miquel.

Exercice 8.1 (Question de cours)**.** *Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal, c-à-d que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P_0\mathbb{K}[X]$, où $P_0 \in \mathbb{K}[X]$.*

Exercice 8.2 (Oral ENS ULM - exo à 5 énormes stûces)**.** *Soient $z_0, z_1, \ldots, z_n$ $n+1$ nombres complexes tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ la propriété suivante soit vérifiée :*

$$P(z_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(z_k).$$

Montrer que $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.

Solution

---

9 Semaine 9 - Polynômes

Khôlleur : M. Haddad.

Exercice 9.1 (Question de cours)**.** *Existence et unicité de la division euclidienne.*

Exercice 9.2 (Polynômes de Tchebysheff)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application f_n de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} f_n : [-1;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(n \arccos(x)) \end{aligned}$$

1. *Calculer f_0, f_1, f_2, f_3.*
2. *Trouver une relation entre $f_{n-1} + f_{n+1}$ et f_n.*
3. *Montrer qu'il existe un polynôme T_n à coeffients réels qui coïncide avec f_n sur $[-1;1]$.*
4. *Trouver le degré de T_n et le coefficient devant le terme dominant de f_n.*
5. *Trouver les racines de T_n.*
6. *En déduire une forme factorisée pour T_n.*

Solution

---

10 Semaine 10 Limites et continuité

Khôlleur : Mme. Miquel.

Exercice 10.1. *Soit f une fonction uniformément continue sur $[0;1[$. Montrer que f est bornée sur $[0;1[$ et que f admet une limite en 1.*

Solution

---

11 Semaine 11 - Dérivation

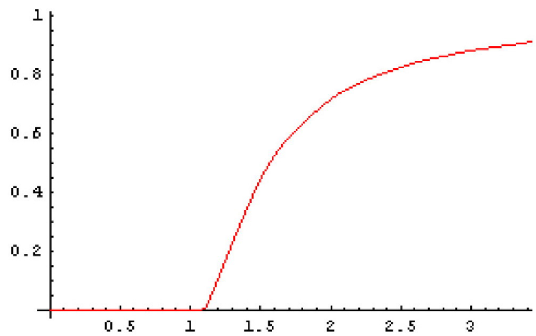
Khôlleur : Mlle. Gicquel.

Exercice 11.1 (Question de cours)**.** *Soit f dérivable, bijective de I sur J. CNS pour que f^{-1} soit dérivable en $b \in J$.*

Exercice 11.2 (Exo crade). *Soit f définie de la manière suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ |x| \leq 1 \\ exp(-\frac{1}{x^2-1}) & sinon. \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.



Solution

Exercice 11.3 (Exo à stûce). *Soit f de classe C^n de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui admette $n+1$ zéros. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer que $(f' + \alpha f)^{(n-1)}$ admet au moins un zéro.*

Solution

Exercice 11.4 (Ptit complément). *Soient α_k, β_k, γ_k $3n$ réels tels que aucun β_i ne soit nul. On définit f par :*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(\beta_k t + \gamma_k).$$

Montrer que f a une infinité de zéros.

Solution

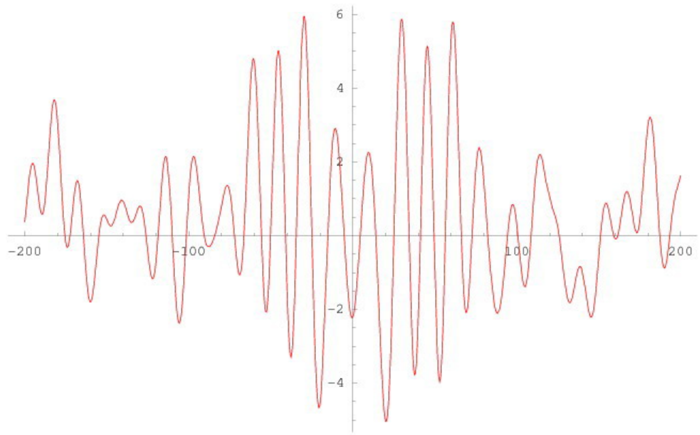


FIG. 5 –

12 Éléments de réponse

12.1 Semaine 1

Exercice 1.1. Montrer que ϕ est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$ et que ϕ est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 1.2. Il est facile de prouver que R n'est pas transitive par un contre-exemple.

Exercice 1.3. Compter le nombre de relations d'équivalences sur un ensemble à n éléments revient à compter le nombre de partitions p_n d'un ensemble à n éléments. On ne connaît pas cependant de formule close pour p_n, mais on connaît des relations de récurrence [3].

12.2 Semaine 2

Exercice 2.1. Exprimer $Max(f(x), g(x))$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 2.2. Considérer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$.

Exercice 2.3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2.4. Soit G un tel sous groupe. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_*^+$ admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$. Si $\alpha = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ et que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

Exercice 2.5. Utiliser la factorisation de $cos(p) + cos(q)$ deux fois de suite.

12.3 Semaine 3

Exercice 3.2. Dériver la relation 4 fois en tout pour tomber sur une équation différentielle du type $y'' + c.y = 0$. La résoudre suivant les valeurs de c et réinjecter le tout dans l'équation d'origine.

[3] Voir par exemple http ://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html.

12.4 Semaine 4

Exercice 4.1.
- Par l'absurde ...
- Projeter les cercles sur deux droites orthogonales.
- En notant O la limite de (C_n), conclure en considérant un cercle passant par O.

Exercice 4.2.
1. Voir que $AB'' = AC''$ puis que $BB'' = BA''$ et $CC'' = CA''$.
2. C'est direct, montrer que $BA'' = A'C$.

12.5 Semaine 5

Exercice 5.1.
- Paramétrage du cas d'une seule racine simple α (en rouge la courbe $\mathfrak{C}$) :

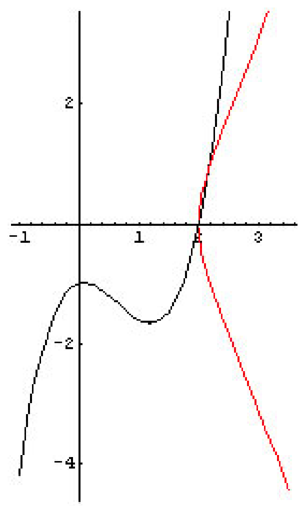


FIG. 6 – P admet une seule racine simple α.

On fait le paramétrage suivant sur $\mathbb{R}$, en remarquant que l'application $\phi : t \longrightarrow -t+\alpha$ est une bijection de $]-\infty, \alpha, [$ dans $[\alpha, +\infty[$:

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } t \in [\alpha, +\infty[& : & x(t) = t^3 + at^2 + bt + c \\ & & y(t) = \sqrt{t^3 + at^2 + bt + c} \\ \text{Si } t \in]-\infty, \alpha, [& : & x(t) = (-t+2\alpha)^3 + a(-t+2\alpha)^2 + b(-t+2\alpha) + c \\ & & y(t) = -\sqrt{(-t+2\alpha)^3 + a(-t+2\alpha)^2 + b(-t+2\alpha) + c} \end{array}$$

- Quelques autres figures :

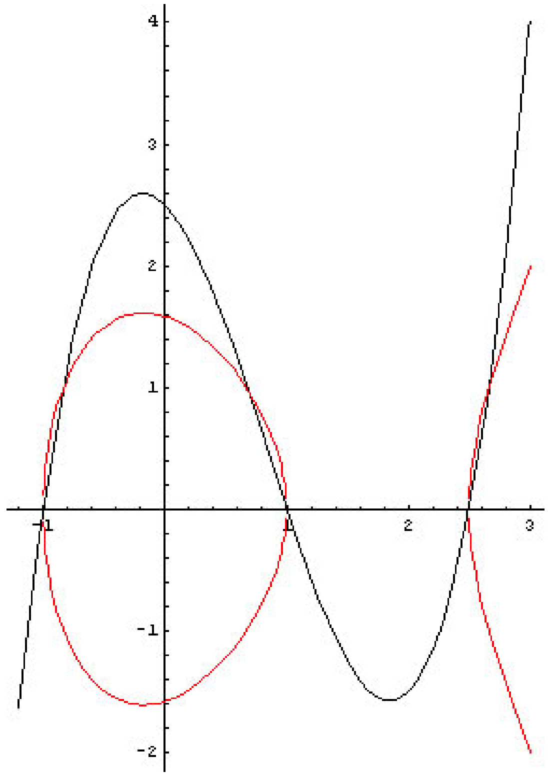


Fig. 7 – P admet 3 racines simples.

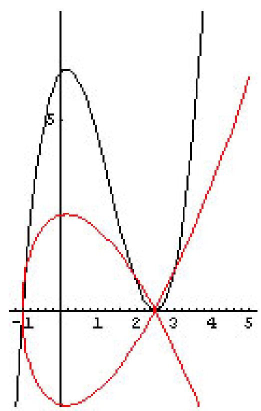


Fig. 8 – P admet une racine simple β et une racine double $\alpha > \beta$

- Dans la figure 8, la tangente en β a une pente infinie, et il y a deux tangentes en α qui ont respectivement pour pente $-\sqrt{\alpha-\beta}$ et $\sqrt{\alpha-\beta}$.
- Les variations de $x(t)$ conduisent à chercher $x(t)$ sous la forme t^2+at+b. Au vue de la relation $P(x)=(x-\beta)(x-\alpha)^2$, on pose $b=\alpha$. Alors $x-\beta=t^2+at+\alpha-\beta$. Pour factoriser cette bête, on aimerait bien avoir $a=2\sqrt{\alpha-\beta}$. On pose donc $a=2\sqrt{\alpha-\beta}$. Alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2+2\sqrt{\alpha-\beta}t+\alpha \\ Q(t) &= (t+\sqrt{\alpha-\beta})^2(t^2+2\sqrt{\alpha-\beta}t)^2 \\ R(t) &= \sqrt{Q(t)}=t(t+\sqrt{\alpha-\beta})(t+2\sqrt{\alpha-\beta}) \end{aligned}$$

12.6 Semaine 6

Exercice 6.2. Tracer la parallèle à la tangente passant par F. Elle recoupe le rayon en N. Montrer que $FM=MN$ et conclure.

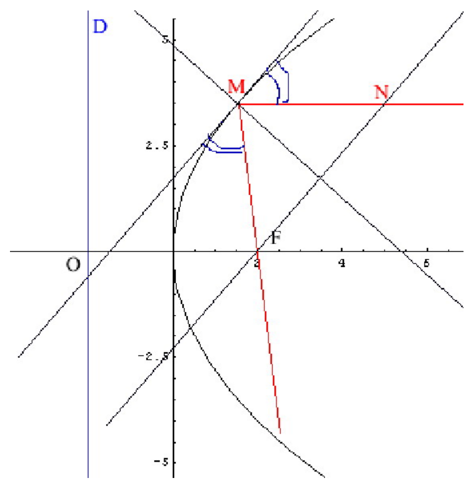


FIG. 9 –

Exercice 6.3. Soit $\theta=\widehat{MNF}$. Calculer l'aire du trapèze $ODMF$ en utilisant la formule classique, puis en disant que ça vaut aussi la somme de l'aire de $ODNF$ et de MNF. En déduire MF en fonction de θ et de p. Reconnaître l'équation polaire de la parabole. Conclure.

Exercice 6.4. En écrivant l'équation du cercle sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= a^2+b^2-R^2 \\ \sigma_3 &= 2a \\ \sigma_2 &= 1-2b \\ \sigma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\sigma_1=0$, on définit σ_3 et σ_2 de sorte que $\sigma_2=1-2b$ et $\sigma_3=2a$. Il suffit de vérifier que $a^2+b^2-\sigma_4\geq 0$. Poser $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$. Voir que $\sigma_2=-S/2$. Il suffit donc de prouver que :

$$\sigma_4 \leq \left(\frac{\sigma_3}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

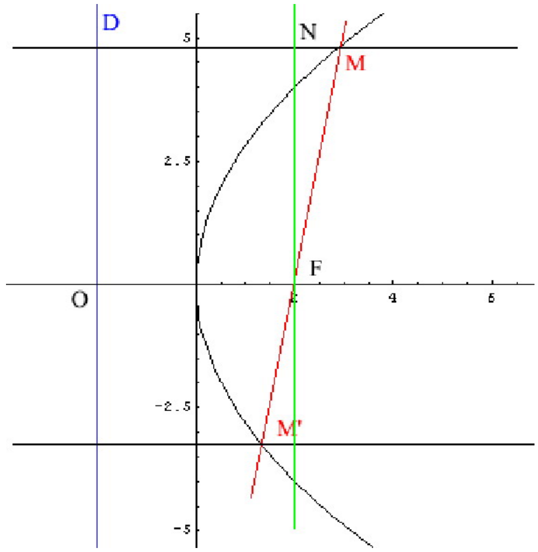


FIG. 10 –

ou encore :

$$\sigma_4 \leq \left(\frac{\sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\frac{S}{2}}{2}\right)^2.$$

Prouver qu'en fait :

$$\sigma_4 \leq \left(\frac{S}{4}\right)^2$$

en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique.

12.7 Semaine 7

Exercice 7.1. Application du cours. (u_n) converge toujours vers 1.

Exercice 7.2. Voir que $u_n - v_n$ est croissante. Supposer par l'absurde qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$, considérer $\epsilon_0 = u_{n_0} - v_{n_0} > 0$ et aboutir à une contradiction.

Exercice 7.3. Isomorphisme qui tôrche :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto sh(x). \end{aligned}$$

12.8 Semaine 8

Exercice 8.2.

PREMIÈRE MÉTHODE.

- **Première stûce**. Il suffit de prouver que $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les racines du polynôme $(z - z_0)^n + cste$. En particulier, poser $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. Il suffit ainsi de prouver que :

$$Q(z) - Q(z_0) = (z - z_0)^n.$$

- **Deuxième stûce**. Considérer les n polynômes interpolateurs de Lagrange de degré $n-1$ formant une base de $\mathbb{C}[X]$ tels que :
$$L_i(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En déduire que $L_i(z_0) = \frac{1}{n}$.
- **Troisème stûce**. Or :
$$L_i(z) = \prod_{j\neq i}(z - z_j)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}.$$
Donc :
$$L_i(z)(z - z_i) = (z - z_i)\prod_{j\neq i}(z - z_j)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}.$$
Or :
$$\prod_{j\neq i}(z_i - z_j) = Q'(z_i).$$
Finalement :
$$L_i(z)(z - z_i) = \frac{Q(z)}{Q'(z_i)}.$$
Evaluer en $z = z_0$ et obtenir :
$$\frac{z_0 - z_i}{n} = \frac{Q(z_0)}{Q'(z_i)}.$$
- **Quatrième stûce**. Réécrire la relation précédente en :
$$Q'(z_i)(z_i - z_0) + nQ(z_0) = 0.$$
En particulier, le polynôme :
$$Q'(z)(z - z_0) + nQ(z_0) - nQ(z)$$
admet n racines qui sont $z_1, z_2, \dots, z_n$ et est de degré $n-1$. Il est donc nul.
- **Cinquième stûce**. Multiplier cette relation par $(z - z_0)^{n-1}$:
$$Q'(z)(z - z_0)^n - n(z - z_0)^{n-1}(Q(z) - Q(z_0)) = 0.$$
Reconnaître une équation de la forme $u'v + uv'$. En tirer :
$$\left(\frac{Q(z) - Q(z_0)}{(z - z_0)^n}\right)' = 0.$$
En déduire qu'il existe une constante λ telle que :
$$Q(z) - Q(z_0) = \lambda(z - z_0)^n.$$
Or $Q(z)$ et $(z - z_0)^n$ sont unitaires de degré n. Conclure.

Deuxième méthode (beaucoup moins rigolo).

On remplace P par les polynômes suivants en z : $z - z_0$, $(z - z_0)^2, \dots, (z - z_0)^{n-1}$. En posant $x_i = z_i - z_0$, on obtient directement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

On prouve par récurrence que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$ on a $\sigma_i = 0$ où les σ_i sont les polynômes symétriques élémentaires des x_k.

- Pour $i = 1$ c'est clair.
- Supposons que pour tout i, $1 \leq i \leq j-1$, avec $j \leq n-1$, l'on ait $\sigma_i = 0$. Or S_j s'exprime en fonction des S_i et σ_i avec $i \leq j$. Comme $S_j = 0$, par hypothèse de récurrence $\sigma_j = 0$.
  En effet, les relations de Newton fournissent :
  $$S_j = \sum_{i=1}^{j-1} \left((-1)^i S_{j-i}\sigma_i\right) + (-1)^j j\sigma_j,$$
  ou aussi :
  $$\sigma_j = \sum_{i=1}^{j-1} \left((-1)^{i+k+1} S_{j-i}\sigma_i\right) - S_j.$$

Il en découle que que $(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n) = z^n + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i$. Les x_i sont donc les racines de $z^n + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i$ et le résultat s'en suit.

12.9 Semaine 9

Exercice 9.2.

1. $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = 2x^2 - 1$, $f_3 = 4x^3 - 3x$.
2. $f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = 2xf_n(x)$, utiliser $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$.
3. Montrer que les T_i définis par $T_0 = 1$, $T_1 = x$ et $T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ conviennent par récurrence.
4. Par récurrence, $deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant est 2^{n-1}.
5. Pour une racine x entre -1 et 1, on a $\cos(n\arccos(x)) = 0$. On en déduit n racines entre -1 et 1 : $\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ avec k entre 1 et $n-1$. Ce sont donc les seules.
6. $$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})\right).$$

12.10 Semaine 10

Exercice 10.1.

1. Par l'absurde, on suppose que f n'est pas majorée, le cas où elle n'est pas minorée se traitant de la même manière :
   $$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in [0;1[\text{ tel que } f(x) \geq M.$$
   On construit ainsi une suite de points (x_n) telle que $\lim f(x_n) = +\infty$. (x_n) étant bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une sous suite x_{ϕ_n} convergente vers $a \in [0;1]$.

– Si $a \neq 1$ alors f est continue en a. Donc $\lim f(x_n) = f(a)$, absurde.
– Si $a = 1$ alors on peut extraire de x_{ϕ_n} une suite croissante qui tend vers 1. Notons la y_n. L'uniforme continuité s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall (x, x') \in [0,1[^2, \quad |x - x'| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Or, puisque $\lim y_n = 1$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Longrightarrow 1 - y_n < \eta.$$

Comme $\lim f(y_n) = +\infty$, on a également :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \Longrightarrow f(y_n) > \epsilon + f(y_{N_1}).$$

y_n étant croissante, on a : $1 - y_{N_2} < \eta$, de sorte que $|y_{N_2} - y_{N_1}| < \eta$. Or $|f(y_{N_2}) - f(y_{N_1})| > \epsilon$, ce qui contredit l'uniforme continuité de f.

Donc f est bornée.

2. Première méthode

Soit (x_n) une suite tendant vers 1. Montrons que $(f(x_n))$ converge en montrant que $(f(x_n))$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

- On peut extraire de (x_n) une suite strictement croissante tendant vers 1 : notons la (y_n). Montrons que $(f(y_n))$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$.

  Puisque $\lim y_n = 1$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Longrightarrow 1 - y_n < \eta.$$

  Aisni, (y_n) étant croissante, on en déduit :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1) \Longrightarrow |y_p - y_q| < \eta.$$

  Par l'uniforme continuité :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1) \Longrightarrow |f(y_p) - f(y_q)| < \epsilon.$$

  En définitive, $(f(y_n))$ est de Cauchy : elle converge donc.

- Soient l et l' deux valeurs d'adhérence correspondant aux deux sous suites $(f(x_{\phi_n}))$ et $(f(x_{\psi_n}))$. Soit y_n une sous-suite croissante de (x_{ϕ_n}) et w_n une sous-suite croissante de (x_{ψ_n}). Supposons $l > l'$ et soit $\epsilon > 0$ tel que $l - l' > \epsilon$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N_1 \Longrightarrow 1 - y_n < \eta, \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N_2 \Longrightarrow 1 - w_n < \eta. \end{aligned}$$

  D'autre part :

$$\begin{aligned} \exists N_3 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N_3 \quad &\Longrightarrow \quad |f(y_n) - l| < \frac{l - l'}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \\ \exists N_4 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N_4 \quad &\Longrightarrow \quad |f(w_n) - l'| < \frac{l - l'}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

  En définitive, pour $N \geq max(N_1, N_2, N_3, N_4)$, on a :

$$\begin{aligned} l - \left(\frac{l - l'}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \quad &< \quad f(y_N) \\ -l' - \left(\frac{l - l'}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \quad &< \quad -f(w_N). \end{aligned}$$

Donc :

$$\epsilon < f(y_N) - f(w_N).$$

Or par croissance de y_n et w_n on a : $|y_N - w_N| < \eta$, ce qui contredit l'uniforme continuité de f. Donc $l = l'$ et $(f(x_n))$ admet une unique valeur d'adhérence.

- Soient (x_n) et (y_n) deux suites de points qui convergent vers 1. D'après ce que l'on vient d'établir, $(f(x_n))$ converge vers un l et $(f(y_n))$ converge vers un l'. En reprenant exactement le raisonnement ci-dessus, on voit que $l = l'$. Ainsi, la suite de l'image des points d'une suite tendant vers 1 converge toujours vers un même l. f admet donc une limite en 1 qui est l.

Deuxième méthode (officielle)

Soit $M(x) = \sup\limits_{x \leq y \leq 1} f(y)$. Voir que M est décroissante, bornée, et donc convergente vers un l. Montrer que $M - f$ tend vers 0 en prenant un x qui vérifie $1 - \eta \leq x < 1$.

12.11 Semaine 11

Exercice 11.2. Ben on bourrine ... Montrer que la bête est paire, continue, dérivable, de classe C^1, puis montrer que sur $]1; +\infty[$ $f^{(n)}$ est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2^n}} f(x),$$

avec $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2} f(x)$. Continuité ...

Seule stûce pour le calcul de limite : voir que $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{f(x)}{(x^2-1)^{2^n}} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{u^{2^n}}{e^u} = 0$.

Exercice 11.3. Voir avec le théorème de Rolle qu'il suffit de prouver que $f' + \alpha f$ admet au moins n zéros. Stûce qui tôrche : considérer $g(x) = f(x)e^{\alpha x}$. Combien de zéros g a-t-elle ? g' ? Calculer g' et tôrcher.

Exercice 11.4. Méthode officielle [4]

Se ramener au cas où les α_i sont distincts deux à deux, ainsi que les β_i. On peut supposer que α_i est le plus grand d'entre eux en valeur absolue.

- Si $\alpha_1 > \sum_{k=1}^{n} \alpha_i$, c'est bon : considérer t tel que $\cos(\beta_1 t + \gamma_1) = 1$, puis $\cos(\beta_1 t' + \gamma_1) = -1$. Conclure par le TVI.
- Sinon, considérer la primitive d'ordre $2n$ de f (qui est obtenue sans ajouter d'autres méchants termes), puis se ramener au cas précédent en choisissant convenablement n.

[4] qui paraît quelque peu obscure et ténébreuse ...