Exercices de Khôlles de Mathématiques, deuxième trimestre

Lycée Louis le Grand, Paris, France

Igor Kortchemski

MP*2 - 2006/2007

Table des matières

13 Semaine 13 - Algèbres **2**

14 Semaine 14 - Réduction des endomorphismes **2**

15 Semaine 15 - Réduction des endomorphismes **3**

16 Semaine 16 - Intégration **3**

17 Semaine 17 - Intégration **4**

18 Semaine 18 - Équations différentielles linéaires **4**

19 Semaine 19 - Différentielle **5**

20 Semaine 20 - Équations différentielles non linéaires **5**

21 Semaine 21 - Espaces euclidiens **6**

22 Semaine 22 - Espaces euclidiens, géométrie **6**

23 Semaine 23 - Séries de Fourier **7**

24 Éléments de réponse **8**
- 24.1 Semaine 13 . . . 8
- 24.2 Semaine 14 . . . 8
- 24.3 Semaine 15 . . . 9
- 24.4 Semaine 16 . . . 9
- 24.5 Semaine 17 . . . 9
- 24.6 Semaine 18 . . . 10
- 24.7 Semaine 19 . . . 10
- 24.8 Semaine 21 . . . 11
- 24.9 Semaine 22 . . . 11
- 24.10Semaine 23 . . . 11

13 Semaine 13 - Algèbres

Khôlleur: M.Duminil.

Exercice 13.1. *Soit* $P = 5X^5 + X^4 + 1$.

1. *Nombre de racines réelles ? Nombre de racines rationnelles ?*
2. *Montrer que* P *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$. *On pourra réduire les coefficients modulo* 2.
3. *Soit* α *la racine réelle de* P. *Montrer que* $\mathbb{Q}[\alpha]$ *est un* $\mathbb{Q}$*-ev de dimension finie qu'on déterminera.*
4. *Montrer que* $\mathbb{Q}[\alpha]$ *est un corps, que l'on notera* $\mathbb{Q}_\alpha$ *dans la suite.*
5. *Soit* β *une autre racine de* P. *Montrer que* $\dim_{\mathbb{Q}_\alpha} \mathbb{Q}_\alpha[\beta] < +\infty$.
6. *Montrer que* $\dim_{\mathbb{Q}_\alpha} \mathbb{Q}_\alpha[\beta] = 2$ *ou* 4.
7. *Remarquer que* 5×2 *et* 5×4 *divisent* $5!$.

Solution

Exercice 13.2. *Plus généralement, soient* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique nulle et* $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* n. *Soit* $\mathbb{K}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ *le corps de décomposition de* P, *autrement dit le plus petit corps contenant les racines de* P.
Montrer que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ *divise* $n!$.

Solution

---

14 Semaine 14 - Réduction des endomorphismes

Khôlleur: M.Randé.

Exercice 14.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$. *A-t-on nécessairement* $\chi_{A^2} \in \mathbb{Z}[X]$ *?*

Solution

Exercice 14.2. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps.*

1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Trouver une relation entre* χ_{AB} *et* χ_{BA}.

Solution

Exercice 14.3. *Trouver tous les entiers* $n \in \mathbb{N}$ *tels qu'il existe une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle vérifiant* $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$.

Solution

---

15 Semaine 15 - Réduction des endomorphismes

Khôlleur: M.Tosel.

Exercice 15.1. *Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Pour $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on note $P_\pi \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation de π, définie par $(P_\pi)_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)}$. Montrer que σ et σ' sont conjuguées[1] dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si, P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Solution

Exercice 15.2. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie :*

-i- $\mathcal{A}$ est stable par tout élément de $\mathcal{L}(E)$.

-ii- Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall (a_1, \dots, a_r) \in \mathcal{A}^r, \quad a_r \circ \dots \circ a_1 = 0$.

-iii- Pour tout $(a,b) \in \mathcal{A}^2$, $a \circ b = b \circ a$.

On note finalement $I = \{a(x), \quad a \in \mathcal{A} \text{ et } x \in E\}$.

1. *Montrer que $I \neq E$.*
2. *On note S un supplémentaire de I dans E. Soit :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : E & \to & \mathcal{L}(S, I) \\ a & \mapsto & a_{|s} \end{array}$$

   Montrer que ϕ est injective.
3. *Montrer que $\dim \mathcal{A} \leq E\left(\dfrac{n^2}{4}\right)$.*
4. *Cette inégalité est-elle optimale ?*

Solution

---

16 Semaine 16 - Intégration

Khôlleur: M.Duval.

Exercice 16.1. *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. Soit F le sous-espace de E constitué des fonctions à support compact[2].*

1. *Montrer que F est dense dans E pour $||\cdot||_1$.*
2. *Soit $f \in E$. En déduire $\lim\limits_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|$.*
3. *Soit $f \in E$. Calculer $\lim\limits_{h \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|$.*

Solution

---

[1] c'est-à-dire qu'il existe $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma = \pi\sigma\pi^{-1}$

[2] f est à support compact s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x| \geq M \Rightarrow f(x) = 0$

17 Semaine 17 - Intégration

Khôlleur: Mlle Biolley.

Exercice 17.1. *Trouver un équivalent de :*

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}} dt$$

lorsque x tend vers 0^+.

Solution

Exercice 17.2. *Calculer :*

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt-t^2} dt.$$

On montrera que I est C^∞ et on déterminera une équation différentielle vérifiée par I.

Solution

---

18 Semaine 18 - Équations différentielles linéaires

Khôlleur: M. Taïeb.

Exercice 18.1. *Soit n un entier naturel non nul. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{R}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tels que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) + u(t)b, \qquad x(0) = 0, \qquad \textit{et} \qquad x(T) = a.$$

2. *La famille $\left(A^k b\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.*

Solution

---

19 Semaine 19 - Différentielle

Khôlleur: M. Lucas.

Exercice 19.1. *Soit V un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant I_n. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est stable par passage au carré.*
2. *V est stable par passage à l'exponentielle.*

Solution

Exercice 19.2.

1. *Calculer la différentielle du déterminant.*
2. *En quels points le déterminant est-il localement inversible ?*

Solution

Exercice 19.3. *Calculer la différentielle de $M \mapsto M^p$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solution

Exercice 19.4.

1. *Calculer la différentielle de :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & (\operatorname{tr}(M), \operatorname{tr}(M^2), \ldots, \operatorname{tr}(M^n)) \end{array}$$

2. *Montrer que $\operatorname{rg} d\phi(M) = \deg \mu_M$, où μ_M est le polynôme minimal de M.*

Solution

---

20 Semaine 20 - Équations différentielles non linéaires

Khôlleur: M. Duminil.

Colle rattrapée en semaine 23.

21 Semaine 21 - Espaces euclidiens

Khôlleur: M. Tosel.

Exercice 21.1. *Déterminer toutes les applications* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall O \in O_n(\mathbb{R}), \qquad f(OX) = Of(X)O^{-1}.$$

Solution

---

22 Semaine 22 - Espaces euclidiens, géométrie

Khôlleur: M. Lucas.

Exercice 22.1.
1. *Rappeler la décomposition polaire.*
2. *Soit* $M \in Gl_n(\mathbb{R})$*. Soit* $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ *tel que* $M = \Omega S$*. Montrer que :*
$$M^tM =^t MM \iff \Omega S = S\Omega.$$
3. *Montrer que pour tout* $O \in O_n(\mathbb{R})$ *:*
$$|\operatorname{tr}(OM)| \leq tr(S).$$
4. *Montrer que*
$$\begin{array}{rcl} N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ M & \mapsto & \sup_{O \in O_n(\mathbb{R})} |\operatorname{tr}(OM)| \end{array}$$
définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Solution

Exercice 22.2 (Autour du théorème des deux carrés)**.** *On rappelle que* $\mathbb{Z}[i]$ *est euclidien. On note* $S = \{a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{N}\}$*.*
1. *Montrer que* S *est stable par produit.*
2. *Quels sont les carrés modulo* 4 *?*
3. *Soit* p *un nombre premier. Montrer que* $p \in S$ *si, et seulement si,* p *se factorise de manière non triviale dans* $\mathbb{Z}[i]$*.*
4. *Montrer que* p *se factorise de manière non triviale dans* $\mathbb{Z}[i]$ *si, et seulement si,* -1 *est un carré modulo* p*.*
5. *En déduire une CNS pour que* $p \in S$*.*

Solution

---

23 Semaine 23 - Séries de Fourier

Khôlleur: M. Duminil.

Exercice 23.1. *1. Soit* $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $u_n(t) = \left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2$*. Montrer que la fonction définie par* $f(0) = 0$ *et*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n u_n(t)$$

est définie et de limite nulle en 0*.*

2. Soient (ρ_n) *et* (θ_n) *deux suites réelles.*

a. Construire une suite (n_k) *d'entiers vérifiant* $6n_k \leq n_{k+1}$ *et une suite d'intervalles* (I_k) *vérifiant :*

$$I_{k+1} \subset I_k, \text{ et } \qquad \forall t \in I_k, \quad \cos(n_k t - \theta_{n_k}) \geq \frac{1}{2}.$$

b. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$*,* $\lim_{n\to\infty} \rho_n \cos(nt - \theta_n) = 0$*. Montrer que* $\rho_n \to 0$*.*

c. Soit $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} c_n e^{int} + e^{-int} = 0$*. Montrer que* $\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$*.*

3. Soit $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = 0.$$

a. Soit F *définie par* $F(x) = c_0 \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ *existe et est continue sur* $\mathbb{R}$*.*

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = 0$*. On admet que* F *est alors affine.*

c. Montrer que $c_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Solution

---

24 Éléments de réponse

24.1 Semaine 13

Exercice 13.1.
1. Une étude de fonction montre que P admet une seule racine réelle.
2. La seule racine rationnelle candidate est $-\frac{1}{5}$. Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, P se factorise en facteurs irréductibles : $P = (X-1)(1+X+X^2+X^3+X^4)$. Or si P est réductible, alors P est le produit d'un polynôme de degré 2 par un autre de degré 3.
3. P est un polynôme annulateur irréductible de α. C'est donc son polynôme minimal. La dimension est donc égale au degré de P, soit 5.
4. Si $x \in \mathbb{Q}[\alpha]$, considérer l'isomorphisme d'algèbres $\Phi : y \mapsto xy$.
5. P s'écrit $P = (X-\alpha)R$ avec $R \in \mathbb{Q}_\alpha[X]$. De plus, R annule β.
6. Comme $\beta \notin \mathbb{Q}$, $\dim_{\mathbb{Q}_\alpha} \mathbb{Q}_\alpha[\beta] = 2, 3$ ou 4. Par l'absurde, supposer que le polynôme minimal de β est de degré 3. Il admet donc une racine réelle, qui ne peut être que α. On peut donc abaisser le degré du polynôme minimal, ce qui est absurde.
7. Remarquer que 5×2 et 5×4 divisent $5!$.

Exercice 13.2. En procédant par récurrence sur n, reprendre les idées de l'exercice précédent, en distinguant suivant si le polynôme est réductible ou non sur $\mathbb{K}$.

24.2 Semaine 14

Exercice 14.1. Remarquer que $\chi_{A^2}(X^2) = \det(A^2 - X^2 I_n) = \det(A - XI_n)\det(A + XI_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 14.2.

1. Si A est inversible : $\chi_{AB}(X) = \det(AB - XI_n) = \det A \det(B - XA^{-1}) = \det(B - XA^{-1}) \det A = \det(BA - XI_n) = \chi_{BA}(X)$.

1'. Considérons les matrices $A' = (Y_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{nn}))$ et $B' = (Z_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(Z_{11}, Z_{12}, \ldots, Z_{nn}))$. A est clairement inversible sur ce corps. Alors $\chi_{A'B'} = \chi_{B'A'}$ d'après ce qui vient d'être dit. D'où $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en évaluant A' et B' en les coefficients de A et de B.

2. Supposons $p < n$. Compléter A et B par des zéros pour les transformer en des matrices A' et B' de taille $n \times n$. Calculer $A'B'$ et $B'A'$ par un produit par blocs et conclure.

Exercice 14.3. Remarquer que $P = X^3 - X^2 - X - 2 = (X-2)(X^2+X+1)$. Poser $X^2 + X + 1 = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$. M annule P : écrivons $\chi_M = (X-2)^p(X-\lambda)^q(X-\overline{\lambda})^r$. Voir que $q = r$. Écrire que $p + 2q = n$, $2p + (\lambda + \overline{\lambda})q = 0$. Voir que $\lambda + \overline{\lambda} = -1$. D'où $n = 5p$. Donc 5 divise n.

Réciproquement,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Utiliser la matrice M en blocs diagonaux si 5 divise n avec $n > 5$.

24.3 Semaine 15

Exercice 15.1. Utiliser les faits suivants :

-i- L'application $\phi : \sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes.

-ii- Deux permutations sont conjuguées si, et seulement si, leurs cycles ont même longueur.

-iii- Si les cycles de σ ont pour longueur respectives $k_1, \dots, k_s$ alors le polynôme caractéristique de P_σ est $(-1)^n(X^{k_1}-1)(X^{k_2}-1)\cdots(X^{k_s}-1)$.

Exercice 15.2.

1. Puisque les éléments de $\mathcal{A}$ commutent deux à deux, on peut les trigonaliser dans une base commune. Dans cette base, ces endomorphismes sont de diagonale nulle puisqu'ils sont nilpotents. Conclure.
2. Prendre un élément du noyau, le décomposer, recommencer r fois.
3. Simple application du théorème du rang.
4. Prendre des matrices par blocs :
$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

24.4 Semaine 16

Exercice 16.1.

1. Soit $f \in E$. Approcher f par une suite d'éléments de F : pour $p \in \mathbb{N}^*$, considérer la fonction K_p définie par :
   - pour $x \in [-p, p]$, $K_p(x) = 1$,
   - pour $|x| \geq p+1$, $K_p(x) = 0$,
   - K_p est affine sur $[-p-1, -p]$ et sur $[p, p+1]$.

   Voir que les fonctions $f_p = K_p f$ convergent vers f au sens de $||\cdot||_1$.
2. Montrer le résultat pour une fonction dans F. Soit ensuite $\epsilon > 0$. Considérer $g \in F$ telle que $||f-g||_1 \leq \epsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, majorer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|$ et conclure.
3. La limité cherchée vaut :
$$\lim_{h \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)| = 2 \int_{\mathbb{R}} |f|.$$
   Montrer le résultat pour une fonction dans F. Soit ensuite $\epsilon > 0$. Considérer $g \in F$ telle que $||f-g||_1 \leq \epsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, encadrer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|$ et conclure.

24.5 Semaine 17

Exercice 17.1. Après avoir justifié la convergence de l'intégrale, à l'aide d'un changement de variable, voir que : $J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \sim -\ln x$ lorsque x tend vers 0^+. Écrire ensuite :
$$I(x) - J(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}} - \frac{e^{-xt}}{t} \right) dt + \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}} dt.$$

Montrer finalement que cette dernière bête est bornée.

Exercice 17.2. Pour montrer le caractère C^∞ se placer sur un compact afin de pouvoir dominer tranquillement. Écrire ensuite :

$$-1 = [e^{xt-t^2}]_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} (x-2t)e^{xt-t^2}dt = xI(x) - 2I'(x).$$

24.6 Semaine 18

Exercice 18.1. SENS DIRECT
Par l'absurde, supposer que $\left(A^k b\right)_{0\le k\le n-1}$ n'est pas générateur dans $\mathbb{R}^n$. En remarquant que le polynôme minimal de A est de degré au plus n, montrer qu'alors pour tout $m \ge n-1$, $\left(A^k b\right)_{0\le k\le m}$ n'est pas générateur.
Montrer alors que $\{e^{tA}b, \quad t\in\mathbb{R}\}$ n'est pas générateur dans $\mathbb{R}^n$: pour cela, voir que e^{tA} est une limite de suite d'éléments de $\mathbb{R}[A]$; or $\mathbb{R}[A]$ est un sev de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il est par conséquent fermé, de sorte que $e^{tA}\in\mathbb{R}[A]$.
Écrire ensuite :

$$\int_0^t \left(e^{-sA}\left(x'(s) - Ax(s)\right)\right)ds = \int_0^t \left(e^{-sA}u(s)b\right)ds,$$

d'où :

$$x(t) = e^{tA}\int_0^t \left(u(s)e^{-sA}b\right)ds$$

En utilisant les sommes de Riemann et le caractère fermé de $Vect(A^k b)$, montrer que $\forall t\in R$, $x(t)\in Vect(A^k b)$. Conclure.

24.7 Semaine 19

Exercice 19.1. SENS DIRECT
Soit $A\in V$. On montre aisément par récurrence sur k que $A^k\in V$ (en considérant $(A+A^k)^2$). Vu que $\exp(A)$ est un polynôme en A (voir exercice précédent), le résultat en découle.

RÉCIPROQUE
On inverse l'exponentielle au voisinage de I_n. Dans tout ce qui suit, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de travail sera V. Soit :

$$\begin{aligned}\phi : V &\to V\\ M &\mapsto \exp(M)\end{aligned}$$

ϕ est de classe C^∞, et $d\phi(I_n).(H) = eH$, de sorte que $d\phi(I_n)\in GL(V)$. On peut donc inverser localement ϕ sur un voisinage de $\phi(I_n) = eI_n$ et donc I_n. Soit alors $A\in V$, $R>0$ tel que $I_n + \frac{A}{R}$ appartienne au voisinage sur lequel on peut inverser ϕ. Il existe alors $M\in V$ telle que $I_n + \frac{A}{R} = \exp(M)$. En élevant cette relation au carré, le résultat s'ensuit.

Exercice 19.2.

1. On trouve $d\det(M).(H) = \mathrm{tr}\,{}^t\mathrm{Com}\,MH$.
2. Pour $n>1$, $n^2 = \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ne \dim\mathbb{R} = 1$, on ne peut donc jamais inverser le déterminant...

Exercice 19.3. La différentielle en M vaut $H\mapsto \sum_{i=0}^{p-1} M^{p-1-i}HM^i$.

24.8 Semaine 21

Exercice 21.1. On procède en plusieurs étapes :

- Pour $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\{OX, \quad O \in O_n(\mathbb{R})\} = \{Y \in \mathbb{R}^n, \quad ||Y|| = ||X||\}$ (compléter par exemple $\frac{X}{||X||}$ et $\frac{Y}{||Y||}$ en des bases orthonormales). Il suffit donc de définir f sur chaque sphère centrée en O.
- Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé dans toute la suite. Soient $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ distincts tels que $O_1X = O_2X$ (ça existe : il y a au moins une symétrie par rapport au hyperplan médiateur et une rotation). Compte tenu de l'hypothèse, $O_2^{-1}O_1 f(X) = O_2^{-1}O_1$. Ainsi :

$$\forall O \in O_n(\mathbb{R}), \qquad OX = X \Longrightarrow Of(X) = f(X)O.$$

- Déterminer $\{O \in O_n(\mathbb{R}), \quad OX = X\}$ (commencer par compléter $\frac{X}{||X||}$ en une base orthonormale), puis en déduire la forme de $f(X)$.

24.9 Semaine 22

Exercice 22.1. Diagonaliser toutes les matrices symétriques. Utiliser aussi le fait que si $O \in O_n(\mathbb{R})$, $|O_{ii}| \leq 1$ (calculer $(O^tO)_{i,i}$).

24.10 Semaine 23

Exercice 23.1.

1. Faire une transformation d'Abel et voir que pour un entier N assez grand il suffit de trouver une constante M telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(t) - u_{n+1}(t)| \leq M.$$

Pour cela, poser $g(x) = \frac{\sin nx}{nx}$ et écrire $u_n(t) - u_{n+1}(t) = \int_{nt}^{(n+1)t} g'(x)dx$. Voir que f' est intégrable.

2. Choisir une suite n_k vérifiant ces conditions. Trouver I_{k+1} à partir de I_k en regardant la longueur des intervalles parcourus lorsque t varie.
3. Écrire $F(x) = Ax + B$. Par 2π périodicité, $A = c_0 = 0$. Mais alors F converge normalement et elle est par conséquent la somme de sa série de Fourier.