Exercice 1

On considère la relation binaire R sur l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$fRg \text{ si et seulement si } \exists A \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}, (x \geq A \Longrightarrow f(x) = g(x)).$$

Quelles sont les propriétés de cette relation binaire ?

Exercice 2

Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, $(F, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et f une application de E vers F surjective et strictement croissante. On suppose que A admet une borne supérieure dans E, montrer que $f(A)$ a une borne supérieure dans F.

Exercice 3

Soient E, F, G et H quatre ensembles, f une application de E sur F et g une application de G sur H. On considère l'application ϕ de G^F sur H^E définie par :

$$\forall u \in G^F \ , \ \phi(u) = g \circ u \circ f.$$

1. Montrer que si f est surjective et g injective, alors ϕ est injective.
2. Montrer que si f est injective et g surjective, alors ϕ est surjective.

Exercice 4

Soit n un entier entre 2 et 6. On dit que le n-uplet $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ appartient à D_n si les nombres x_i sont positifs ou nuls et sont tels que les nombres $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_4$, ... ,$y_{n-1} = x_n + x_1$ et $y_n = x_1 + x_2$ soient tous non nuls. Soit $x \in D_n$, on cherche à montrer l'inégalité suivante :

$$S_n(x) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{n}{2}.$$

1. Rappeler l'ingalité de Cauchy-Schwarz.
2. On prend $n = 2$ et $x \in D_2$. Que vaut $S_2(x_1, x_2)$?
3. Soit $x \in D_3$.
   - Montrer que :
   $$\frac{y_2 + y_3}{y_1} + \frac{y_3 + y_1}{y_2} + \frac{y_1 + y_2}{y_3} \geq 6.$$
   - En déduire $S_3(x) \geq \frac{3}{2}$.
4. Soit $x \in D_n$ vérifiant :
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
   Montrer que l'on a $S_n(x) \geq \frac{n}{2}$.
   On pourra comparer $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$ et $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.
5. Vérifier que pour $x \in D_4$, on a :
   $$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \geq 2 \left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right).$$

6. Trouver le plus petit nombre $c_n > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$c_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 .$$

(montrer qu'un tel nombre existe et le donner)

7. Montrer que pour $x \in D_5$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \right)^2 \geq \frac{5}{2} \left(\sum_{i=1}^{5} x_i y_i \right) .$$

Conclure.

8. Soit $x \in D_6$.

   - Montrer que :

$$(x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_5)^2 + (x_3 + x_6)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{6} x_i \right)^2$$

   - En déduire :

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i \right)^2 \geq 3 \left(\sum_{i=1}^{6} x_i y_i \right) .$$

   Conclure

Exercice 5 Seulement si vous avez fait ce qui précède !

On cherche toutes les applications f de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tout couple de vecteurs $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ de $\mathbb{Z}^2$:

$$u \perp v \Longrightarrow f(u + v) = f(u) + f(v).$$

On rappelle que $u \perp v$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

- On vérifiera que les fonctions suivantes conviennent :

$$\begin{array}{l} (x, y) \mapsto ax + by \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \\ (x, y) \mapsto r(x) - r(y) \end{array}$$

  où $r(x)$ vaut 1 si x est impair, 0 si x est pair.

- Puis on montrera que les fonctions cherchées sont exactement les fonctions de la forme :

$$(x, y) \mapsto ax + by + c(x^2 + y^2) + d(r(x) - r(y)) \text{ avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$