Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E):

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

1. Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est solution de (E) sur chacun des intervalles où elle est définie.
2. On pose $y(x) = z(x)\phi(x)$. Déterminer l'équation (E') vérifiée par z.
3. Intégrer l'équation (E').
4. Résoudre (E) :
   (a) sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$
   (b) sur $]-\infty, 1[$.
   (c) sur $]0,+\infty[$.
   On pourra utiliser $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2} = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-h+\frac{h^2}{2}}{h^3} = \dfrac{1}{3}$
   (d) sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

1. On note $\tilde{C}$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ où ∞ est un symbole qu'on lit "infini".
   On a les opérations suivantes :
   - $a + \infty = \infty + a = \infty$ si $a \neq \infty$
   - $b.\infty = \infty.b = \infty$ si $b \neq 0$
   - $\dfrac{1}{\infty} = 0$
   - $\dfrac{1}{0} = \infty.$

   On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions de $\tilde{C}$ dans $\tilde{C}$ de la forme :

   $$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ avec } ad - bc \neq 0\ ,\ (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \text{ pour } z \in \mathbb{C}$$

   et $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$.

   (a) Montrer :
   - si $f \in \mathcal{H}$ et $g \in \mathcal{H}$ alors $f \circ g \in \mathcal{H}$
   - $Id \in \mathcal{H}$
   - tout élément de $\mathcal{H}$ est bijectif et que sa réciproque est dans $\mathcal{H}$

   (b) On note f_0 la fonction définie sur $\tilde{C}$ par $f_0(z) = \dfrac{1}{z}$.
   Montrer que tout élément f de $\mathcal{H}$ peut s'écrire sous la forme $s \circ f_0 \circ t$ où t est une translation et s une similitude directe.

2. Quelle est la forme géométrique de l'ensemble des points d'affixe z tels que :

   $$|z-p| = k|z-q|$$

   où $k \in \mathbb{R}_{+^*}$ et $p \neq q$?

3. Quelle est la forme géométrique de l'ensemble des points d'affixe z tels que :

$$\arg \frac{z-p}{z-q} = \phi \ [\pi]$$

où $p \neq q$?

4. Montrer que si

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ , \ A + Be^{i\theta} + Ce^{-i\theta} = 0$$

alors $A = B = C = 0$.

5. (a) On veut construire le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$ à partir du point d'affixe z.

   - Donner une construction géométrique de l'image du point d'affixe z dans l'inversion de centre O et de rapport -1
     (on pourra utiliser le cercle circonscrit à un triangle).
   - Donner une construction du point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

   (b) Quelle est l' image par f_0 :

   - d'une droite passant par O ?
   - d'un cercle de centre O ?
   - d'une droite ne passant pas par O ?
   - d'un cercle passant par O ?
   - d'un cercle ne passant pas par O ?

Exercice 3
On appelle polygone simple tout polygone de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie que deux côtés non consécutifs ont une intersection vide.
On note $\mathcal{P}$ l'ensembles des polygones simples de $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$.
Si P est un polygone de $\mathcal{P}$, on note :

- $\mathcal{A}(P)$ l'aire de P
- $\mathcal{B}(P)$ le bord de P, c'est à dire la réunion des côtés
- $\mathcal{I}(P)$ l'intérieur de P, c'est à dire $P - \mathcal{B}(P)$

sur le bord

- $b(P) = \text{card}(\mathcal{B}(P) \cap \mathbb{Z}^2)$, c'est à dire le nombre de points à coordonnées entières ~~dans l'intérieur~~ de P
- $i(P) = \text{card}(\mathcal{I}(P) \cap \mathbb{Z}^2)$, c'est à dire le nombre de points à coordonnées entières ~~sur le bord de~~ P. à l'intérieur

1. Soient $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ deux points de $\mathbb{Z}^2$ tels que O, A et B ne soient pas alignés. On note T le triangle OAB et P le parallélogramme $OACB$ où $C = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
   Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) $i(T) = 0$ et $b(T) = 3$
   (b) $i(P) = 0$ et $b(P) = 4$
   (c) $\{O + u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} \ , \ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}^2$
   (d) $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = 1$
   (e) $\mathcal{A}(T) = \dfrac{1}{2}$

2. Si P et Q sont deux polygones simples dont l'intersection est un segment non réduit à un point, on note $P+Q$ le polygone simple construit en prenant la réunion de P et de Q (voir la figure).
Soient $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ et f la fonction définie sur $\mathcal{P}$ par :

$$f(P)=\alpha i(P)+\beta b(P)+\gamma.$$

On dit que f est additive si pour tout couple (P,Q) de polygones simples tels que $P+Q$ soit défini, on ait : $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$.
Montrer que f est additive si et seulement si $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$ et $\gamma=-\alpha$.

3. Soit T un triangle vérifiant l'une des propriétés du 1). Montrer que

$$\mathcal{A}(T)=i(T)+\frac{1}{2}b(T)-1.$$

4. Montrer que la formule précédente est vraie pour tout triangle.

5. On veut montrer que la formule est vraie pour tout polygone de $\mathcal{P}$. Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de sommets. On suppose donc le résultat vrai pour un polygone d'au plus $n-1$ sommets ($n\geq 4$) et on considère un polygone à n sommets.
   (a) Montrer que la formule est vraie lorsque le polygone est convexe
   (b) Traiter le cas général.
   (On pourra utiliser l' enveloppe convexe de P, c'est à dire la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^2$ qui contient P.)

<u>figure</u>