On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions lipschitziennes.
Le but du problème est de chercher les fonctions F de $\mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \quad (1)$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et a et λ deux réels non nuls donnés.

Partie I Question préliminaire
Soit $F \in \mathcal{F}$ et vérifiant (1). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$$

et

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka)$$

Partie II Propriétés des fonctions lipschitziennes

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que $f \in \mathcal{L}$ si et seulement si f' est bornée.
3. Soient f et g dans $\mathcal{L}$ et bornées. Montrer que $fg \in \mathcal{L}$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ |f(x)| \leq A|x| + B.$$
5. Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 0 \leq x - y \leq 1 \implies |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$
Montrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie III Quelques résultats sur les séries
Les résultats de cette partie pourront être admis et utilisés par la suite
Soit (u_n) une suite réelle. On rappelle que la série de terme général u_n notée $\sum_{k \geq 0} u_k$ est convergente si la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est convergente.

Dans ce cas, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite de la suite (S_n).

1. (*) Montrer que si la série de terme général $|u_n|$ est convergente alors la série de terme général (u_n) est convergente.
2. On considère ue série de la forme $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ où la suite (u_n) est positive décroissante et tend vers 0.
   (a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ est convergente. (On pourra considérer les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1})).

(b) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|S_{2n} - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k| \leq u_{2n+1}$$

et

$$|S_{2n+1} - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k| \leq u_{2n}. \quad +2$$

u_{2n+2}

Partie IV Etude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$.

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} k|\lambda|^k$ est convergente. (On pourra considérer $\frac{(k+1)|\lambda|^{k+1}}{k|\lambda|^k}$.)

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \lambda^k f(x+ka)$ est convergente.

   (c) En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na).$$

   (d) i. On prend $f = f_1$ où f_1 est définie par $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer F_1.

   ii. Même question avec $f = f_2$ où f_2 est définie par $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \cos x$. On montrera que F_2 est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos a + \lambda^2}.$$

2. On suppose dans cette question que $|\lambda| > 1$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \lambda^{-k} f(x-ka)$ est convergente.

   (b) En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na).$$

   (c) Déterminer la fonction F correspondante dans les deux cas suivants :

   i. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 1$.

   ii. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \cos x$.

Partie V Etude de (1) pour $|\lambda| = 1$.

1. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.

   (a) Montrer que s'il existe $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) alors f est bornée.

   (b) Montrer, en en explicitant une qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) - F(x+a) = 0.$$

   (c) Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est elle unique ?

   (d) On suppose dans cette question que f est la fonction $x \mapsto \cos x$.

   i. Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

   ii. Si $a = 2\pi$, montrer qu'il n'existe aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

2. On suppose dans cette question que $\lambda = -1$.

(a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) + F(x+a) = 0.$$

(b) Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est elle unique ?

(c) On suppose dans cette question que f est la fonction $x \mapsto \cos x$.

   i. Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

   ii. Si $a = \pi$, montrer qu'il n'existe aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

(d) On suppose dans cette question que $a = 1$ et $f \in \mathcal{L}$ est décroissante de limite nulle en $+\infty$, dérivable à dérivée f' croissante.

   i. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(-1)^k f(x+k)$ converge.

   ii. Montrer qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim\limits_{+\infty} F = 0$