1

1° Posons $\varphi(t)=\frac{1}{n+1}\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)^{n+1}$, d'où

$$\varphi'(t)=g(t)\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)^n.$$

Par suite

$$\int_0^t \varphi'(s)\,\mathrm{d}s=\varphi(t)-\varphi(0)=\varphi(t)=\int_0^t g(s)\left(\int_0^s g(u)\,\mathrm{d}u\right)^n \mathrm{d}s.$$

2° *a*) $v'(t)=u(t)\leqslant f(t)+g(t)\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s=f(t)+v(t)g(t)$.

b) Dans le cas particulier où $g(t)=a$

$$w'(t)=v'(t)e^{-at}-av(t)e^{-at}\leqslant f(t)e^{-at}.$$

Puis, en intégrant,

$$w(t)=\int_0^t w'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t e^{-as}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Comme $w(t)=v(t)e^{-at}$, on en déduit

$$v(t)\leqslant\int_0^t e^{a(t-s)}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

c) Dans le cas général, on a

$$w'(t)=\left(v'(t)-v(t)g(t)\right)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\leqslant f(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Puis

$$w(t)=\int_0^t w'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t f(s)\left[\exp\left(-\int_0^s g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}s$$

et, en remplaçant $w(t)$ par sa valeur

$$v(t)\leqslant\int_0^t f(s)\left[\exp\left(\int_s^t g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}s.$$

d) On peut appliquer ce qui précède en prenant pour f la fonction nulle. On obtient ainsi

$$\forall t\geqslant 0,\quad 0\leqslant u(t)\leqslant 0.$$

Autrement dit, la seule fonction u satisfaisant aux conditions imposées est la fonction nulle.

3° *a*) Puisque u est croissante, l'inégalité $t' > t$ implique

$$u(t'-s) \geqslant u(t-s)$$

pour toute valeur de s. On en déduit, car ϕ est positive

$$\int_0^t \big(u(t'-s) - u(t-s)\big)\phi(s)\,\mathrm{d}s \geqslant 0.$$

Comme u est aussi à valeurs positives, on a également

$$\int_t^{t'} u(t'-s)\phi(s)\,\mathrm{d}s \geqslant 0.$$

Finalement, on voit que $t' > t$ implique $\mathrm{U}(t') \geqslant \mathrm{U}(t)$: la fonction U est croissante.

b) Montrons la continuité de U en 0. Puisque u et ϕ sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on peut poser

$$\mathrm{M} = \sup_{t\in[0,\,1]} |u(t)|, \quad \mathrm{M}^* = \sup_{t\in[0,\,1]} |\phi(t)|.$$

On a alors

$$\forall t > 0, \quad |\mathrm{U}(t)| \leqslant \int_0^t |u(t-s)|\,|\phi(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant t\mathrm{M}\mathrm{M}^*$$

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{U}(t) = \mathrm{U}(0) = 0.$$

Soit $t_0 > 0$. Ici encore, la continuité de u et de ϕ justifie l'existence de M et M*. On peut écrire, pour $t \in [t_0, 2t_0]$,

$$\mathrm{U}(t) - \mathrm{U}(t_0) = \int_0^{t_0} [u(t-s) - u(t_0-s)]\phi(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t u(t-s)\phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

La fonction u étant continue sur le segment $[0, 2t_0]$, y est uniformément continue. Par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (y, y') \in [0, 2t_0]^2, |y - y'| < \alpha \Longrightarrow |u(y) - u(y')| \leqslant \varepsilon.$$

Or $t \in [t_0, 2t_0]$ et $s \in [0, t_0]$ impliquent $t - s \in [0, 2t_0]$. Par conséquent,

$$|t - t_0| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |u(t-s) - u(t_0-s)| \leqslant \varepsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned}|\mathrm{U}(t) - \mathrm{U}(t_0)| &\leqslant \int_0^{t_0} |u(t-s) - u(t_0-s)|\,|\phi(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\qquad + \int_{t_0}^t |u(t-s)|\,|\phi(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant t_0\varepsilon\mathrm{M}^* + (t-t_0)\mathrm{M}\mathrm{M}^*.\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon' > 0$. Choisissons $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2t_0 M^*}$. Pour toutes les valeurs de t telles que $0 \leq t - t_0 \leq \inf\left(t_0, \dfrac{\varepsilon'}{2MM^*}\right)$, on aura

3

$$|U(t) - U(t_0)| \leq t_0 \varepsilon M^* + (t - t_0) MM^* \leq \varepsilon'.$$

On a donc prouvé la continuité de U à droite en t_0.

La continuité à gauche se montre de façon analogue. On écrit, pour $t \in [0, t_0]$,

$$U(t) - U(t_0) = \int_0^t [u(t-s) - u(t_0 - s)] \phi(s)\, ds + \int_{t_0}^t u(t_0 - s) \phi(s)\, ds,$$

d'où

$$|t - t_0| < \alpha \implies |U(t) - U(t_0)| \leq \varepsilon t M^* + (t_0 - t) MM^* \leq \varepsilon t_0 M^* + (t_0 - t) MM^*.$$

On conclut ensuite comme précédemment.

Notations

Il suffit de poser $x = t - s$ pour trouver

$$\int_0^t u(t-s)\phi(s)\, ds = -\int_t^0 u(x)\phi(t-x)\, dx.$$

L'équation (E) peut donc s'écrire sous la forme équivalente

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(s)\phi(t-s)\, ds.$$

I

1° (E_1) $\quad u(t) = 5\cos t + \displaystyle\int_0^t u(s)(t-s)\, ds$

ou $$u(t) = 5\cos t + t\int_0^t u(s)\, ds - \int_0^t s u(s)\, ds.$$

a) Comme u est continue, les deux applications

$$t \longrightarrow \int_0^t u(s)\, ds \quad \text{et} \quad t \longrightarrow \int_0^t s u(s)\, ds$$

sont dérivables (et même de classe C^1) et, par suite, u est dérivable

$$u'(t) = -5\sin t + \int_0^t u(s)\, ds + tu(t) - tu(t). \qquad (1)$$

De même cette égalité montre à son tour que u' est dérivable et

$$u''(t) = -5\cos t + u(t).$$

Donc toute solution continue de (E_1) est solution de l'équation différentielle

$$u'' - u = -5\cos t. \qquad (2)$$

b) On a, d'après (E_1), $u(0)=5$ et, d'après (1), $u'(0)=0$.
Notons que, réciproquement, on montre par deux primitivations successives que toute solution de (2) telle que $u(0)=5$ et $u'(0)=0$ est solution de (E_1).

c) La solution générale de l'équation homogène associée à (2) est

$$u(t)=\mathrm{A}\ \mathrm{ch}\ t+\mathrm{B}\ \mathrm{sh}\ t.$$

Une solution particulière de l'équation complète est $t \longrightarrow \frac{5}{2}\cos t$, d'où la solution générale de l'équation complète :

$$u(t)=\mathrm{A}\ \mathrm{ch}\ t+\mathrm{B}\ \mathrm{sh}\ t+\frac{5}{2}\cos t.$$

Les conditions $u(0)=5$ et $u'(0)=0$ imposent $\mathrm{A}=\frac{5}{2}$ et $\mathrm{B}=0$, d'où finalement la solution, unique, de (E_1) :

$$u(t)=\frac{5}{2}(\mathrm{ch}\ t+\cos t).$$

2° *a*) L'équation (E'_2) s'écrit

$$u(t)=1+\int_0^t u(s)ae^{-(t-s)}\,\mathrm{d}s$$

ou

$$u(t)=1+ae^{-t}\int_0^t u(s)e^{s}\,\mathrm{d}s.$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que u est dérivable. Avant de dériver l'expression précédente, nous la multiplions par e^{t} :

$$u(t)e^{t}=e^{t}+a\int_0^t u(s)e^{s}\,\mathrm{d}s$$

$$u'(t)e^{t}+u(t)e^{t}=e^{t}+au(t)e^{t}$$

ou

$$u'(t)+(1-a)u(t)=1. \tag{3}$$

D'autre part, $u(0)=1$. Réciproquement, toute solution de (3) vérifiant $u(0)=1$ est solution de (E'_2).

Si $a=1$, l'intégration de (3) donne $u(t)=t+\mathrm{Cte}$, puis $u(t)=t+1$.

Si $a\neq 1$, l'intégration de l'équation homogène associée à (3) donne $u(t)=\mathrm{A}e^{(a-1)t}$. Une solution particulière de (3) étant $u(t)=\frac{1}{1-a}$, la solution générale est de la forme $u(t)=\mathrm{A}e^{(a-1)t}+\frac{1}{1-a}$. La condition imposée à $u(0)$ donne $A = \dfrac{-a}{1-a}$. Finalement l'unique solution de (E_2') est

$$u(t) = \frac{1 - ae^{(a-1)t}}{1-a}.$$

Lorsque a est supérieur ou égal à 1, $u(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Lorsque a est strictement plus petit que 1, $u(t)$ tend vers $\dfrac{1}{1-a}$ quand t tend vers $+\infty$.

b) L'équation (E_2) s'écrit

$$u(t) = te^{-t} + \int_0^t u(s)e^{-(t-s)}\,ds$$

ou

$$u(t)e^t = t + \int_0^t u(s)e^s\,ds.$$

En dérivant, on obtient

$$u'(t) = e^{-t}.$$

Comme $u(0)=0$, la seule solution de (E_2) est donc

$$u(t) = -e^{-t} + 1.$$

3° L'équation (E_3) s'écrit

$$u(t) = \int_0^t u(s)\sin(t-s)\,ds$$

ou

$$u(t) = \sin t \int_0^t u(s)\cos s\,ds - \cos t \int_0^t u(s)\sin s\,ds.$$

On voit donc que u est dérivable :

$$u'(t) = \cos t \int_0^t u(s)\cos s\,ds + u(t)\sin t\cos t + \sin t \int_0^t u(s)\sin s\,ds - u(t)\cos t\sin t$$

$$u'(t) = \cos t \int_0^t u(s)\cos s\,ds + \sin t \int_0^t u(s)\sin s\,ds.$$

On voit maintenant que u' est dérivable :

$$u''(t) = -\sin t \int_0^t u(s)\cos s\,ds + u(t)\cos^2 t + \cos t \int_0^t u(s)\sin s\,ds + u(t)\sin^2 t$$

$$u''(t) = -u(t) + u(t) = 0.$$

De plus $u(0) = u'(0) = 0$. Par suite l'unique solution de (E_3) est la fonction nulle.

1° On a

$$u_1(t)-u_2(t)=\int_0^t [u_1(s)-u_2(s)]\phi(t-s)\,\mathrm{d}s$$

d'où
$$|u_1(t)-u_2(t)|\leqslant\int_0^t |u_1(s)-u_2(s)|\,|\phi(t-s)|\,\mathrm{d}s.$$

Comme $s\in[0,t]$ implique $t-s\in[0,t]$, on a

$$|u_1(t)-u_2(t)|\leqslant g(t)\int_0^t |u_1(s)-u_2(s)|\,\mathrm{d}s.$$

En appliquant le résultat du 2° d) des préliminaires à la fonction positive

$$t\longmapsto |u_1(t)-u_2(t)|,$$

on voit que cette fonction est nulle, d'où

$$\forall t\geqslant 0,\quad u_1(t)=u_2(t).$$

Dans le cas de l'équation (E_3), la fonction nulle est évidemment solution; on vient de prouver que c'est la seule.

2° a) Une récurrence immédiate permet de prouver que toutes les fonctions u_n sont continues. Dans le cas où f est croissante positive et ϕ positive, on montre que toutes les fonctions u_n sont croissantes positives par récurrence. C'est clair pour $n=0$. Si c'est vrai jusqu'au rang n, d'après la 3e question des préliminaires, la fonction

$$t\longmapsto\int_0^t u_n(t-s)\phi(s)\,\mathrm{d}s$$

est croissante positive, il en est donc de même de u_{n+1}.

b) On a $u_1(t)-u_0(t)=\int_0^t f(t-s)\phi(s)\,\mathrm{d}s$, d'où

$$\forall t\in[0,t_0],\ |u_1(t)-u_0(t)|\leqslant\int_0^t |f(t-s)|\,|\phi(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant ctg(t)\leqslant ct_0g(t).$$

On a aussi

$$u_{n+1}(t)-u_n(t)=\int_0^t [u_n(s)-u_{n-1}(s)]\phi(t-s)\,\mathrm{d}s$$

d'où

$$\forall t\in[0,t_0],\quad |u_{n+1}(t)-u_n(t)|\leqslant\int_0^t |u_n(s)-u_{n-1}(s)|\,|\phi(t-s)|\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant g(t)\int_0^t |u_n(s)-u_{n-1}(s)|\,\mathrm{d}s.$$

La majoration suivante se montre également par récurrence. Elle est vraie pour $n=0$. Si elle est vraie jusqu'au rang $n-1$, on a

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(t)-u_n(t)| &\leqslant g(t)\int_0^t |u_n(s)-u_{n-1}(s)|\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant g(t)\int_0^t \frac{ct_0 g(s)}{(n-1)!}\left(\int_0^s g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{n-1}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

soit

$$|u_{n+1}(t)-u_n(t)| \leqslant ct_0\,\frac{g(t)}{n!}\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)^n$$

d'après la formule démontrée dans la 1[re] question des préliminaires.

c) Pour un réel t fixé, on peut appliquer ce qui précède avec $t_0=t$. Comme la série de terme général

$$ctg(t)\,\frac{\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)^n}{n!}$$

converge $\left(\text{sa somme est égale à } ctg(t)\exp\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)$, il en est *a fortiori* de même de la série de terme général $|u_{n+1}(t)-u_n(t)|$.

La somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[u_{k+1}(t)-u_k(t)\right]$ est égale à $u_n(t)-u_0(t)$. La convergence de la série de terme général $u_{k+1}(t)-u_k(t)$ entraîne donc celle de la suite de terme général $u_n(t)$.

d) Soit $p \geqslant n+1$;

$$\begin{aligned}|u_p(t)-u_n(t)| = \left|\sum_{k=n}^{p-1}\left[u_{k+1}(t)-u_k(t)\right]\right| &\leqslant \sum_{k=n}^{p-1}|u_{k+1}(t)-u_k(t)|\\ &\leqslant \sum_{k=n}^{p-1}\frac{ct_0 g(t)}{k!}\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)^k \leqslant ct_0 g(t)\sum_{k=n}^{p-1}\frac{\alpha^k}{k!}.\end{aligned}$$

(La dernière inégalité vient du fait que g est à valeurs positives.)

En fixant n et faisant tendre p vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient

$$\forall t\in[0,\,t_0],\quad |u(t)-u_n(t)| \leqslant ct_0 g(t)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}.$$

Montrons maintenant que u est continue et vérifie (E).

Soit $t_1 \geqslant 0$ et $t_0 > t_1$. La fonction g est continue sur le segment $[0,\,t_0]$ donc y est bornée. On pose $\mathrm{N}=\sup\limits_{t\in[0,\,t_0]} g(t)$. On a

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall t\in[0,\,t_0],\quad |u(t)-u_n(t)| \leqslant ct_0\mathrm{N}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}.$$

Donnons-nous alors $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \leqslant \frac{\varepsilon}{3\,ct_0\mathrm{N}}$$

car le reste d'une série convergente tend vers 0, d'où

$$\forall t \in [0, t_0], \quad |u(t) - u(t_1)| \leqslant |u(t) - u_{n_0}(t)| + |u_{n_0}(t) - u_{n_0}(t_1)| + |u_{n_0}(t_1) - u(t_1)|$$
$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |u_{n_0}(t) - u_{n_0}(t_1)|.$$

La continuité de u_{n_0} en t_1 entraîne l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que

$$|t - t_1| < \eta \implies |u_{n_0}(t) - u_{n_0}(t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a donc, pour $t \in [0, t_0]$ et $|t - t_1| < \eta$,

$$|u(t) - u(t_1)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction u est donc bien continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque : En fait, la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur le compact $[0, t_0]$ et on vient de redémontrer le théorème classique : la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Enfin,

$$\forall t \in [0, t_0], \quad \left| \int_0^t [u(s) - u_n(s)]\phi(t-s)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant ct_0^2\mathrm{N}^2 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$$

Cette inégalité montre que la suite $\left(\int_0^t u_n(s)\phi(t-s)\,\mathrm{d}s\right)$ tend vers $\int_0^t u(s)\phi(t-s)\,\mathrm{d}s$. En prenant la limite des deux membres de l'égalité

$$u_{n+1}(t) = f(t) + \int_0^t u_n(t-s)\phi(s)\,\mathrm{d}s,$$

on trouve

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-s)\phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

On a donc construit par « approximations successives » une solution de (E).

III

1° Une démonstration par récurrence immédiate montre que tous les u_n sont strictement positifs.

On montre aussi par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

La suite (a_n) converge donc vers $\dfrac{1}{1-b}$ (par valeurs inférieures).

Montrons maintenant par récurrence l'existence des v_n et l'inégalité $v_{n+1} \leqslant 1 + bv_n$. u_0 est évidemment bornée. Si u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$|u_{n+1}(t)| \leqslant 1 + \int_0^t |u_n(t-s)|\phi(s)\,ds \leqslant 1 + v_n \int_0^t \phi(s)\,ds \leqslant 1 + bv_n.$$

Cela prouve que (u_{n+1}) est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que $v_{n+1} \leqslant 1 + bv_n$.

Les inégalités $v_n \leqslant a_n$ se montrent également par une récurrence immédiate.

Comme la suite (a_n) est majorée $\left(\text{par } \dfrac{1}{1-b}\right)$, la suite (v_n) est également majorée. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{1-b}.$$

En prenant la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |u(t)| \leqslant \frac{1}{1-b}.$$

La fonction u est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2° D'après II 2° a), chaque fonction u_n est croissante. Cela signifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (t, t') \in \mathbb{R}^{+2}, \quad t' > t \implies u_n(t') \geqslant u_n(t).$$

En prenant la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^{+2}, \quad t' > t \implies u(t') \geqslant u(t).$$

La fonction u est donc croissante. Comme on a démontré à la question précédente que u était majorée, u a une limite quand t tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que

$$\int_A^{+\infty} \phi(s)\,ds \leqslant \frac{\varepsilon}{4}(1-b).$$

On a alors, pour $t > A$,

$$\int_0^t u(t-s)\phi(s)\,ds - bu(\infty)$$
$$= \int_0^A [u(t-s) - u(\infty)]\phi(s)\,ds + \int_A^t u(t-s)\phi(s)\,ds - u(\infty)\int_A^{+\infty} \phi(s)\,ds.$$

Puis

$$\left|\int_0^t u(t-s)\phi(s)\,ds - bu(\infty)\right| \leqslant \int_0^A [u(\infty)-u(t-s)]\phi(s)\,ds + \frac{1}{1-b}\int_A^t \phi(s)\,ds + \frac{1}{1-b}\int_A^{+\infty}\phi(s)\,ds$$

$$\leqslant \int_0^A [u(\infty)-u(t-s)]\phi(s)\,ds + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

D'autre part, il existe $B>0$ tel que

$$\forall y \geqslant B, \quad 0 \leqslant u(\infty)-u(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2b}\cdot$$

On en déduit

$$\forall t \geqslant A+B, \quad \left|\int_0^t u(t-s)\phi(s)\,ds - bu(\infty)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2b}\int_0^A \phi(s)\,ds + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi prouvé

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t u(t-s)\phi(s)\,ds = bu(\infty).$$

Compte tenu de l'équation vérifiée par u, on obtient

$$u(\infty) = 1 + bu(\infty), \quad \text{soit} \quad u(\infty) = \frac{1}{1-b}\cdot$$

Dans le cas de l'équation (E_2'), la fonction ϕ est $s \longmapsto ae^{-s}$. Cette fonction ϕ est positive et on a $\int_0^{+\infty}\phi(s)\,ds = a$. On supposera donc $a<1$. On a effectivement montré, dans ce cas, que la solution u avait une limite égale à $\frac{1}{1-a}\cdot$

Solution de l'exercice

$P = \{0\} \to$ ok.

$P \neq \{0\}$ Soit $k = \min\{|a-b|,\ (a,b) \in P \cup \{0\}\ a \neq b\}$

$k = |a_0 - b_0|$

$d = \text{pgcd}(a_0, b_0)$

$\exists (u,v)$ tq $|ua_0 - vb_0| = d$

et $d \geq k$ (stabilité de P).

et $d \,|\, |a_0 - b_0|$ donc $d = k$

et si $0 \leq a_0 < b_0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $a_0 = km$ et $b_0 = k(m+1)$

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$ avec $\lambda \geq m(m-1)$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$ tels que :

$\lambda = \alpha m + \beta(m+1)$

En effet $m = 0$ c'est vrai.

si $m > 0$ $\lambda = mq + r$ $\quad 0 \leq r \leq m-1 \leq q$

et $(\underbrace{q-r}_{\geq 0})m + \underbrace{r}_{\geq 0}(m+1) = \lambda$. et $q = r = 0$ impossible

donc $\lambda k = \alpha a_0 + \beta b_0 \in P$.

donc si $n \geq \max(m(m-1), k)$ alors $k\mathbb{N} \cap [n, +\infty[\subset P$

Reciproque. si $x \in P \cap [n, +\infty[$ et $x \notin k\mathbb{N}$

alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $0 < |x - pk| < k$

ce qui contredit la definition de k