d'après : **CENTRALE 2003 TSI – MATHEMATIQUES 2**

PARTIE I

I.A. $\boxed{A = PBP^{-1}}$

I.B. En utilisant : $R = Q^{-1}$

I.C. Toutes les matrices Q_i sont inversibles soit par hypothèse, soit comme conséquence de leur définition.
Alors si : $A = Q_1 B Q_1^{-1}$ et $B = Q_2 C Q_2^{-1}$
donc : $A = (Q_1Q_2)\,C\,(Q_2^{-1}Q_1^{-1}) = Q_3 C Q_3^{-1}$ avec $Q_3 = Q_1Q_2$
Puis ; ${}^tA = Q_4\,{}^tB\,Q_4$ avec $Q_4 = {}^t(Q_1^{-1})$

I.D.1) Si A est diagonale on : $A = {}^tA$. Les matrices sont donc semblables (avec $Q = Id$

I.D.2) A est semblable à une matrice diagonale A' et ${}^tA$ est semblable à la matrice diagonale ${}^tA'$ en utilisant **I.C)**, donc ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

PARTIE II

II.A. Effectuons le produit de matrices : ${}^tA\,P = P\,A$ pour obtenir le système : $(b,c) \neq (0,0)$ (matrice non diagonale)

$$\begin{cases} ax+cz &= ax+cy \\ bx+dz &= az+ct \\ ay+ct &= bx+dy \\ by+dl &= bz+dl \end{cases} \iff \begin{cases} c(z-y) &= 0 \\ bx+dy &= az+ct \\ ay+ct &= bx+dy \\ b(y-z) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= z \\ bx+(d-a)y-ct &= 0 \end{cases}$$

II.B. En choisissant $t=0$ et $x=(d-a)$ on a : $y=z=-b$ et la matrice P_1
En choisissant $t=(d-a)$ et $x=0$ on a : $y=z=c$ et la matrice P_2

$$P_1 = \begin{pmatrix} d-a & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & d-a \end{pmatrix}.$$

et l'une au moins de ces deux matrices est de rang 2 donc inversible.

II.C. Alors ${}^tAP = PA \iff {}^tA = PAP^{-1}$ donc : A et ${}^tA$ sont semblables.

PARTIE III

III.A.1) La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, nulle sur la diagonale :
Les composantes de $g(e_i)$ dans cette base forment la i ème colonne de cette matrice, donc $g(e_i)$ est une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$
En outre : $g(e_1) = \overrightarrow{0}$
Par récurrence, on vérifie que pour $1 \le k \le n-1$: Im $(g^k) \subset$ Vect $(e_1, \dots, e_{n-k})$ et donc : $g^n = O$
Si $p=1$ alors $g=O$ et sa matrice est la matrice nulle, et $f = \alpha Id$ est un endomorphisme diagonalisé (c'est dire qu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale).
Donc A et ${}^tA$ sont semblables comme en **I.D.1)**.
On a : pour $0 \le k \le p-1$: $g^k(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$ et pour $k \ge p$: $g^k(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Etudions la combinaison linéaire : $\overrightarrow{\sigma} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g^{p-i}(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{p-j} g^j(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$

En calculant successivement : $g^{p-1}(\overrightarrow{\sigma}) = \overrightarrow{0}$ puis $g^{p-2}(\overrightarrow{\sigma}) = \overrightarrow{0}$, ... , $g^{p-j}(\overrightarrow{\sigma}) = \overrightarrow{0}$
jusqu'à $g(\overrightarrow{\sigma}) = \overrightarrow{0}$, on obtient : $\alpha_p = a_{p-1} = dots = a_1$.
Donc le sytème de vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ est libre

III.A.2) Pour $i>1$ on a $f(\overrightarrow{u_i}) = \alpha\overrightarrow{u_i} + g(\overrightarrow{u_i}) = \alpha\overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{u_{i-1}}$ et $f(\overrightarrow{u_1}) = \alpha\overrightarrow{u_1}$
Soit B la matrice de f dans la base ($\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$) et C celle de f dans la base. Ce sont des matrices semblables.
($\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_{n-1}}, \dots, \overrightarrow{u_1}$). On a donc :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = {}^tB$$

A et B sont semblables, de même que ${}^tA$ et ${}^tB$ donc A et ${}^tA$ sont semblables

III.A.3) La matrice U s'écrit sous forme bloc : $U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & M \\ \hline (0) & U_2 \end{array}\right)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

U_1 est carrée d'ordre p et U_2 est carrée d'ordre $n-p$ quelconque.
Bien sur : $U^p = O$ puisque $g^p = O$.

En Notant avec un indice 1 la première composante d'un vecteur, on peut évaluer la i ème colonne de P par : $g^0(\overrightarrow{u}_i)_1 = Id(\overrightarrow{u}_i)_1 = (\overrightarrow{u}_i)_1$, $g^1(\overrightarrow{u}_i)_1 = g(\overrightarrow{u}_i)_1$, $g^2(\overrightarrow{u}_i)_1$, ..., $g^{p-1}(\overrightarrow{u}_i)_1$, $g^p(\overrightarrow{u}_i)_1$, ..., $g^{n-1}(\overrightarrow{u}_i)_1$
soit : $g^0(\overrightarrow{u}_i)_1 = Id(\overrightarrow{u}_i)_1 = (\overrightarrow{u}_i)_1$, $g^1(\overrightarrow{u}_i)_1 = g(\overrightarrow{u}_i)_1$, $g^2(\overrightarrow{u}_i)_1$, ..., $g^{p-1}(\overrightarrow{u}_i)_1$, 0 , ..., 0
Donc les lignes de P sont nulles à partir de la $p+1$ ème.
De plus les p premiers vecteurs de la base vérifient la définition de **V.B.1)** donc pour $1 \le i \le p$ et $1 \le k \le p$,

$$g^{k-1}(\overrightarrow{u}_i) = g^{k-1}(g^{p-i}(\overrightarrow{u})) = g^{k-1+p-i}(\overrightarrow{u}) = \begin{cases} \overrightarrow{u_{i-k+1}} & \text{si } i-k>0 \\ \overrightarrow{u}_1 & \text{si } i=k \\ \overrightarrow{0} & \text{si } i<k \end{cases}$$

Donc : $g^{k-1}(\overrightarrow{u}_i)_1 = \begin{cases} 1 & \text{si} i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et la matrice $P = \left(\begin{array}{c|c} I_p & Q \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$ de rang p.

Précisons : $Q = [p_{ki}]_{\substack{1\le k\le p \\ p+1\le i\le n}} = [g^{k-1}(u_i)_1]_{\substack{1\le k\le p \\ p+1\le i\le n}}$

Avec cette matrice P et le bloc I_p , on a $\forall \overrightarrow{v}$ *in* W $h(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.
$h(W) \subset \text{Im } h$ et de même dimension donc : $h(W) = \text{Im } h$ et sous espace propre relatif à la valeur propre 1
Le noyau étant sous espace propre relatif à la valeur propre 0, il est en somme directe avec W et d'après le théorème du rang, W et Ker h sont supplémentaires de $\mathbb{C}^n$.

W est stable par g et par $f = g + \alpha Id$

Etudions la stabilité de Ker h **par** g.

Un vecteur $\overrightarrow{x} \in$ Ker h de matrice $X = [x_i]$ $(\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i})$ est solution du système $PX = 0$:

$$\left\{ \forall k = 0 \dots p : \quad x_k + \sum_{i=p+1}^{n} g^k(\overrightarrow{u}_i)_1 \,.\, x_i = 0 \right\}$$

Calculons : PUX pour vérifier que : $g(\overrightarrow{x}) \in$ Ker h

$$PU = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & M+QU_2 \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right).$$

Précisons : $M + QU_2 = \left[\sum_{j=1}^{n} g^{k-1}(u_j)_1 . g(u_i)_j\right]_{\substack{1\le k\le p \\ p+1\le i\le n}} = [g^k(u_i)_1]_{\substack{1\le k\le p \\ p+1\le i\le n}}$

car on reconnait le calcul de la première ligne du produit de matrices $U^{k-1}U$ donc la première ligne de U^k.
On passe de P à PU en supprimant la première ligne de P et en complétant par une dernière ligne de 0
Donc PUX est la matrice obtenue en enlevant la première ligne de PX et en complétant par 0 en dernière ligne.
$\overrightarrow{x} \in$ Ker $h \implies PX = 0 \implies PUX = 0 \implies g(\overrightarrow{x}) \in$ Ker h
Ker h est un sous espace stable par g et donc par f.

III.B.1) La matrice de f dans la base B est triangulaire supérieure. Celle de g dans cette base est aussi triangulaire supérieure.

On peut la présenter sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} T_1 & B \\ \hline (0) & T_2 \end{array}\right)$ qui est aussi triangulaire supérieure.

En outre T_2 a une diagonale nulle et donc : $T_2^{n-k} = 0$. (analogue à **V.B.1)**)
Tous les termes de la diagonale de T_1 sont associés à des valeurs propres de f distinctes de α et sont donc non nuls.
T_1 est inversible.

III.B.2) $\left(\begin{array}{c|c} T_1^{n-k} & B' \\ \hline (0) & T_2^{n-k} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T_1^{n-k} & B' \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$ est donc de rang k comme T_1.

La dimension de $C = \mathrm{Ker}\, g^{n-k}$ est $n-k$. Il est stable par g et par f.

III.B.3) on remarque : $F = \mathrm{Im}\ g^{n-k}$ donc stable par g puis f.
Soit $\overrightarrow{x} \in F \cap G$, Si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ $g^{n-k}(\overrightarrow{x})$ a pour matrice $T_1^{n-k}X$ et est non nul ($\notin \Gamma$)
F et G sont supplémentaires et stables par g et f.

III.C.1) En choisissant une base associée à la somme directe, la matrice de f est :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_F & (0) \\ \hline (0) & B_G \end{array}\right) \text{ semblable à } A.$$

$$^tB = \left(\begin{array}{c|c} ^tB_F & (0) \\ \hline (0) & ^tB_G \end{array}\right) \text{ semblable à } ^tA.$$

Par hypothèse de récurrence : B_F et ^tB_F sont semblables de même que B_G et ^tB_G.
$\exists Q_F$ et Q_G inversibles telles que $Q_FB_F = {}^tB_FQ_F$ et $Q_GB_G = {}^tB_GQ_G$

En posant $Q = \left(\begin{array}{c|c} Q_F & (0) \\ \hline (0) & Q_G \end{array}\right)$ on a Q inversible et $QB = {}^tBQ$ ce qui prouve que B et ^tB sont semblables

---

Exercice

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et π un majorant de $|S_n - na_n|$

On a :

$$|S_n - na_n| = |S_n - n(S_n - S_{n-1})| = |nS_{n-1} - (n-1)S_n| \leq \pi$$

d'où $$\left|\frac{S_{n-1}}{n-1} - \frac{S_n}{n}\right| \leq \frac{\pi}{n(n-1)} = \pi\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

puis : $$\left|\sum_{p+1}^{q} \frac{S_{k-1}}{k-1} - \frac{S_k}{k}\right| \leq \pi \sum_{p+1}^{q}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\pi$$

d'où $$\left|\frac{S_p}{p} - \frac{S_q}{q}\right| \leq \pi\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

On fait tendre q vers $+\infty$, en remarquant que $\left|\frac{S_n}{n} - a_n\right| \leq \frac{\pi}{n}$
(ce qui montre $\lim \frac{S_n}{n} = 0$)

d'où $\left|\frac{S_p}{p}\right| \leq \frac{\pi}{p}$ puis (S_p) majorée et donc $\sum a_n$ convergente.
(série à termes positifs)