Partie I - Questions préliminaires

I.A - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux bases de E ; on note P la matrice de passage de $\mathscr{U}$ à $\mathscr{V}$.

Soit f un endomorphisme de E, A sa matrice sur $\mathscr{U}$ et B sa matrice sur $\mathscr{V}$. Exprimer A en fonction de B, de P et de P^{-1}. (On ne demande pas de démonstration).

I.B - Soient M et N deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$; on rappelle que M est dite semblable à N s'il existe une matrice inversible Q appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = QNQ^{-1}$.

Montrer que si M est semblable à N, alors N est semblable à M. On dit alors, de façon abrégée, que « M et N sont semblables ».

I.C - Soit A, B et C trois matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est semblable à B et que B est semblable à C.

Montrer que A est semblable à C.

Montrer aussi que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

I.D - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

I.D.1) Montrer que si A est diagonale, A et ${}^tA$ sont semblables.

I.D.2) Montrer que si A est semblable à une matrice diagonale alors A et ${}^tA$ sont semblables.

Plus généralement :

Le but du problème est de montrer que toute matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Partie II - Cas $n = 2$

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, non diagonale, qu'on écrit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ et on cherche à résoudre l'équation } (\mathscr{E}) : {}^tAP = PA,$$

où l'inconnue P est une matrice appartenant à $M_2(\mathbb{R})$, qu'on cherchera sous la forme

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.$$

II.A - Trouver un ensemble de conditions, portant sur x, y, z et t, qui soit nécessaire et suffisant pour que P vérifie $(\mathscr{E})$.

On ramènera cet ensemble à deux conditions, l'une étant $y = z$ et l'autre ne portant que sur x, y et t.

II.B - En prenant l'un des deux nombres x ou t nul, l'autre égal à $d - a$ et, dans chacun des deux cas, en choisissant convenablement y, trouver deux matrices P solutions ; montrer que l'une au moins de ces deux matrices est inversible.

II.C - Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

Partie III. Cas général

Dans cette partie, n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont A est la matrice sur la base canonique.

III.A - $\exists u \neq 0$ tq $g(u) = \alpha u$ ...

On admettra le résultat suivant :

Soit α une valeur propre de f. On peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un entier k entre 0 et $n-1$ ayant les propriétés suivantes :

- La matrice T de f sur $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
- Les k premiers termes diagonaux sont tous différents de α et les $n-k$ derniers sont tous égaux à α.

On pose $g = f - \alpha\, id$, où id désigne l'identité de $\mathbb{C}^n$.

III.B - Dans cette question, $k = 0$; les termes diagonaux de T sont donc tous égaux à α.

III.B.1) Montrer que, pour tout i de 2 à n, $g(e_i)$ appartient au sous-espace engendré par $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$.

En déduire que l'endormorphisme g^n est nul. (g^m désigne l'endomorphisme composé $g \circ g \dots \circ g$, où g est utilisé m fois).

Dans toute la suite de ce **V.B**, on désigne par p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que g^p soit nul.

Montrer que si $p = 1$, alors A est semblable à ${}^tA$.

On continue en supposant $p \neq 1$. On a donc : $2 \leq p \leq n$, $g^{p-1} \neq 0$ et on désigne par $\vec{u}$ un vecteur tel que $g^{p-1}(\vec{u})$ ne soit pas nul.

On pose $\vec{u}_p = \vec{u}$, $\vec{u}_{p-1} = g(\vec{u}), \dots, \vec{u}_1 = g^{p-1}(\vec{u})$.

Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre.

III.B.2) On suppose que $p = n$.

Quelles sont les matrices de f sur les bases $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ et $(\vec{u}_n, \vec{u}_{n-1}, \dots, \vec{u}_1)$ de $\mathbb{C}^n$? Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

III.B.3) On suppose que $p < n$ et on complète $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ en une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

On note U la matrice de g sur cette base et P la matrice carrée dont la k-ième ligne est égale à la première ligne de U^{k-1}.

Montrer que les lignes de cette matrice P, à partir de la $p+1$-ième, sont nulles. Que peut-on en conclure concernant le rang de P ?

Pour j et k entre 1 et p, préciser $g^{k-1}(u_j)$ suivant que $k < j$, $k = j$ ou $k > j$.

En déduire les p premiers termes de la k-ième ligne de P.

Montrer que la matrice P est de rang p.

Soit h l'endomorphisme admettant P pour matrice dans la base (u1, ... , un) de C^n

et soit W le sous-espace engendré par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$.

Montrer que pour tout $\vec{v} \in W$, on a $h(\vec{v}) = \vec{v}$.

En déduire que W et le noyau de h sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$. Montrer que ces deux sous-espaces sont stables par g et par f.

III.C - Dans cette question, k n'est pas nul.

III.C.1) Justifier que la matrice de g sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} T_1 & | & B \\ — & & — \\ O & | & T_2 \end{bmatrix},$$

où les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures, de tailles respectives k et $n-k$.

Montrer que la matrice T_2^{n-k} est nulle et que la matrice T_1 est inversible.

III.C.2) On admet que la matrice de g^{n-k} sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} T_1^{n-k} & | & B' \\ — & & — \\ O & | & T_2^{n-k} \end{bmatrix}.$$

Quel est le rang de cette matrice ? Quelle est la dimension du noyau G de g^{n-k} ?

III.C.3) Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k)$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et que ces sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ sont stables par g et f.

III.D - On suppose par récurrence que toute matrice carrée complexe de taille comprise entre 1 et $n-1$ est semblable à sa transposée.

III.D.1) On suppose ici qu'il existe deux sous-espaces F et G supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et stables par f, aucun de ces deux sous-espaces n'étant réduit au vecteur nul.

En considérant les restrictions de f à F et G, montrer que A est semblable à ${}^tA$.

III.D.2) En rassemblant les résultats, montrer que, dans tous les cas, A est semblable à ${}^tA$.

Pour conclure, ~~on peut montrer~~ montrez que si deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Exercice

Soit (a_n) une suite de réels positifs tendant vers 0. On suppose que la suite

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - na_n\right)$$

est bornée.
Montrer que la série $\sum a_n$ converge.