E3A 2001, troisième épreuve de maths

Partie I

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, elle équivaut à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable sur $]0,1]$ et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc elle est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. Le changement de variable $u=\sqrt{kt}$ (C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même) conduit à

$$J_k=\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

3. Analogue au 1. : au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}\sim\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}\sim\dfrac{2e^{-t}}{\sqrt{t}}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

4. (a) Il suffit de remplacer $\mathrm{ch}\,t$ par sa définition, et de multiplier numérateur et dénominateur par e^{-t}.

   (b) Sur $]0,+\infty[$, $e^{-2t}<1$, donc

$$\frac{1}{1+e^{-2t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-2kt}$$

Donc

$$K=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt$$

La série fournie par l'énoncé n'étant pas absolument convergente, il n'y a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème habituel d'intégration terme à terme sur un intervalle non borné. On écrit, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}K&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt+\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}\left((-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt+\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\end{aligned}$$

puisque la première somme est finie. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt=0$$

Il s'agit du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial, donc

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right|\le\frac{e^{-(2n+3)t}}{\sqrt{t}}$$

On peut, ou bien utiliser le thèorème de convergence dominée en majorant encore par $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, ou bien écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right|dt \leq J_{2n+3} = \sqrt{\frac{\pi}{2n+3}}$$

qui tend bien vers 0 si n tend vers $+\infty$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k J_{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

5. La forme intégrale du 4.(a) montre, en écrivant $0 < e^{-2t} < 1$, que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{J_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}dt < K < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}J_1$$

donc

$$\frac{1}{2} < K < 1$$

On peut aussi utiliser la série alternée, mais c'est plutôt plus lourd.

Exercice 3

1°a) En passant en coordonnées polaires, $f(x,y) = \rho^{2\rho\cos\theta} = e^{2\cos\theta.\rho\ln\rho}$;
or $\lim\limits_{(x,y)\overset{\neq}{\to}(0,0)} \rho\ln\rho = 0$ et $2\cos\theta$ est bornée,
donc, $f(x,y) \underset{(x,y)\overset{\neq}{\to}(0,0)}{\to} 1 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$.
Comme d'après les théorèmes généraux de continuité,
f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$,on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \dfrac{e^{x\ln x^2}-1}{x} \sim \dfrac{x\ln x^2}{x} = \ln x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$:
f n'admet donc pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$.

De plus, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$:
f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0,0)$ égale à 0.

c) $f(0,0)=1$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$
$f(x,y) = 1 \Longleftrightarrow (x^2+y^2)^x = 1 \Leftrightarrow x\ln(x^2+y^2) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

2°a) Soit $g(x) = f(x,0)$;
g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$;
$\forall x \in \mathbb{R}^*\ g'(x) = \left(\ln x^2 + 2\right)\left(x^2\right)^x$
L'on a vu ci-dessus que $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} -\infty$: la courbe de g présente donc une tangente verticale en $(0,0)$.
$\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

b) Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{e},0\right[$, $g(x) > g(0) = 1$ donc $f(x,0) > f(0,0)$: f n'admet pas de maximum en $(0,0)$.
Pour $x \in \left]0,\dfrac{1}{e}\right[$, $g(x) < g(0) = 1$donc $f(x,0) < f(0,0)$: f n'admet pas de minimum en $(0,0)$.
f n'admet donc pas d'extremum en $(0,0)$.

3°) Pour $(x,y)\neq(0,0)$,on a:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}f(x,y).$$
Les points critiques sont donc solutions de :
$$\begin{cases} \ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = \pm 1 \\ \text{ou } y = 0 \text{ et } x = \pm\dfrac{1}{e} \end{cases}$$
Ce sont donc : $(0,1), (0,-1), (\frac{1}{e},0)$ et $\left(-\frac{1}{e},0\right)$.

4°a) Pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $x>0$, $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x \geqslant x^{2x} = f(x,0) = g(x)$.
$f(0,0) = 1 \geqslant g(0) = 1$
donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x,y) \geqslant g(x)$.
Or g admet un minimum en $\dfrac{1}{e}$; on en déduit que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{e},0\right)$.

b) $f(x,0) = g(x) \leqslant g(-\frac{1}{e}) = f\left(-\frac{1}{e},0\right)$ pour tout $x<0$;
d'autre part , $xlnx^2 - x\ln\left(x^2+y^2\right) = x\ln\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \geqslant 0$ pour tout $x<0$.
Donc $f(x,y) = e^{x\ln\left(x^2+y^2\right)} \leqslant e^{x\ln x^2} = f(x,0) \leq f\left(-\frac{1}{e},0\right)$.
f admet donc un maximum en $\left(-\frac{1}{e},0\right)$.

5°) Soit $h(x) = f(x,1) - f(0,1) = (x^2+1)^x - 1$;
$h'(x) = \left(\ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}\right)h(x) = k(x)h(x)$
$k'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}(1+\dfrac{2}{x^2+1})$.

~~Exercice 3~~ Exo 1

Première partie

1° Les coefficients de A et de B étant tous positifs, ceux de AB le sont aussi. De plus, la somme des coefficients de la i-ème ligne de AB s'écrit $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$ ce qui montre que $AB \in S$.

2° Il est alors immédiat par récurrence sur k que $A^k \in S$ pour tout $k \geq 1$. C'est vrai aussi pour $k = 0$ car $A^0 = I$.

3° $\|AX\| = \sup_{i\in\{1,\dots,n\}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \leq \sup_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|x_k| \leq \sup_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\|X\| = \|X\|$.

4° Notons $M = A - I$. Les coefficients m_{ij} de M vérifient $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0$; par conséquent, les colonnes de la matrice M sont liées et 1 est bien une valeur propre de A. De plus, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

5° Soit X un vecteur propre associé à λ ; alors $AX = \lambda X$ d'où $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\| \leq \|X\|$ d'après 3°. Comme X n'est pas le vecteur nul $|\lambda \leq 1|$.

6° a) i) Puisque $X \in Ker(A-\lambda I)^2$, $Y \in Ker(A-\lambda I)$. En appliquant k - 1 fois A à l'égalité définissant Y, il vient

$$\begin{cases} Y = AX - \lambda X \\ \lambda Y = A^2X - \lambda AX \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^{k-1}Y = A^kX - \lambda A^{k-1}X \end{cases}$$

. En combinant ces équations pour éliminer les termes A^jX intermédiaires (on multiplie la j-ème équation par λ^{k-j}) on trouve, pour $k \geq 1$, $A^kX = \lambda^kX + k\lambda^{k-1}Y$.

ii) Puisque $|\lambda| = 1$, la suite des vecteurs λ^kX est bornée, de même que la suite des vecteurs A^kX d'après la question 3°. La suite des vecteurs $k\lambda^{k-1}Y$ l'est donc aussi, ce qui n'est possible que si $Y = 0$.

iii) Il résulte de ce qui précède que $Ker(A-\lambda I)^2 \subset Ker(A-\lambda I)$; comme l'inclusion inverse est évidente, on a l'égalité $Ker(A-\lambda I)^2 = Ker(A-\lambda I)$.

b) Montrons le résultat à démontrer par récurrence sur k. Il est vrai pour $k = 2$. Admettons le pour k - 1 et soit $X \in Ker(A-\lambda I)^k$ et $Y = (A-\lambda I)X$; alors $Y \in Ker(A-\lambda I)^{k-1} = Ker(A-\lambda I)$ d'où $X \in Ker(A-\lambda I)^2 = Ker(A-\lambda I)$ ce qui achève la démonstration, l'inclusion inverse étant évidente.

Deuxième partie

1° a) $\left|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right| = \frac{1}{p}\left|\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}\right| \le \frac{2}{p|1-\lambda|}$ d' aprèsI. 5°. Donc $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

b) Si $X \in Ker(A-\lambda I)$, $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k X \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

2° Si A est diagonalisable, tout vecteur X est somme de vecteurs propres, soit $X = \sum_{i=1}^{q} X^{(i)}$ avec $AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)}$. Alors $X_p = \sum_{i=1}^{q} X_p^{(i)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

3° a) En mettant A sous la forme $(A-\lambda I)+\lambda I$ et en remarquant que I commute avec toute autre matrice, on peut calculer A^k par application de la formule du binôme : $A^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (A-\lambda I)^j (\lambda I)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j$. Si $X \in Ker(A-\lambda I)^q$, $A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X$.

b) On sait que pour k fixé, le coefficient du binôme C_k^j est maximal pour $j = \left[\frac{k}{2}\right]$ (partie entière) et augmente lorsque j varie de 0 à $\left[\frac{k}{2}\right]$. Donc si $k \ge 2q-2$, $C_k^j \lambda^{k-j} \le C_k^{q-1}\lambda^{k-j} = \frac{k(k-1)\ldots(k-q+2)}{(q-1)!}\lambda^{k-j}$. Cette quantité, produit d' un polynôme et d' une fonction exponentielle tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$ car $|\lambda < 1|$.

c) Pour $p \ge q$, $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{q-1} A^k X + \sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{p}\sum_{k=q}^{p} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X$. Lorsque $p \to +\infty$, le premier terme de cette somme tend vers 0. De plus, il résulte de b) que $\frac{1}{p}\sum_{k=q}^{p} C_k^j \lambda^{k-j} = \frac{p-q+1}{p}\,\frac{1}{p-q+1}\sum_{k=q}^{p} C_k^j \lambda^{k-j} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ car la convergence d' une suite implique sa convergence au sens de Cesaro. Donc$X_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

4° a) Le théorème de Cayley-Hamilton montre que P_A est un polynôme annulateur de A. En supposant que les λ_j sont deux à deux distincts, le théorème de décomposition des noyaux affirme alors que $F = \left(\bigoplus_{j=0}^{s} Ker(A-\lambda_j I)^{k_j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^{r} Ker(A-\lambda_j I)^{q_j}\right)$. D' après la première partie,

$$F = \left(\bigoplus_{j=0}^{s} Ker(A-\lambda_j I)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^{r} Ker(A-\lambda_j I)^{q_j}\right).$$

b) Décomposons X dans cette somme directe : $X = X^{(0)}+\ldots+X^{(s)}+X^{(s+1)}+\ldots+X^{(r)}$. Alors $X_p = X_p^{(0)}+\ldots+X_p^{(s)}+X_p^{(s+1)}+\ldots+X_p^{(r)}$. Convenons que $\lambda_0 = 1$. Alors

➔ $X_p^{(0)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p} X = \frac{p+1}{p} X^{(0)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^{(0)}$.

➔ Pour $1 \le j \le s$, $X^{(j)}$ est un vecteur propre associé à une valeur propre de module 1 mais différente de 1. D' après1° b), $X_p^{(j)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

➔ Pour $s+1 \le j \le r$, $X^{(j)}$ est un vecteur vérifiant les hypothèses de 3° ; d' après3° c), $X_p^{(j)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Par conséquent, $X_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^{(0)}$.