Exercice 2 intégration.

1°. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}\, dt.$

2°. Donner la valeur de J_k $\left(\text{on pourra utiliser l'égalité } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

3°. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\, t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $K = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\, t}.$

4°. (a) Montrer que $K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1+e^{-2t})}\, dt.$

(b) En déduire que $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$

5°. Montrer que $\dfrac{1}{2} < K < 1.$

Exercice 3

fonction plusieurs variables.

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^x \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 1.$$

1°. **(a)** Étudier la continuité de f.

(b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f au point $(0,0)$.

(c) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f.

2°. On définit la fonction g sur R par :

$$g \ : \ x \mapsto f(x,0) \qquad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$

(a) Dresser avec précision le tableau de variations de la fonction g.

(b) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$ (justifier soigneusement la réponse).

3°. Déterminer les points critiques de la fonction f.

4°. **(a)** Vérifier que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x,y) \geqslant g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

(b) La fonction f admet-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$?

5°. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux expressions :

$$\big(f(x,1) - f(0,1)\big) \text{ et } \big(f(x,-1) - f(0,-1)\big)$$

sont du signe de x.

Que peut-on en conclure?

Exercice 1 Reduction et evn

$\boldsymbol{R}$ est le corps des nombres réels, C celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note E le C-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C . I est la matrice identité de E. Pour A élément de E, a_{ij} est le coefficient de A situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note F le C-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans C.

Pour $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de F, on pose $\|X\| = \sup\limits_{1\le k\le n} |x_k|$; on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur F. On note $KerA$ l'ensemble des éléments X de F vérifiant $AX=0$.

Une matrice $A=(a_{ij})$ à coefficients réels est dite stochastique si:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \\ \forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2, 0 \le a_{ij} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des matrices stochastiques de E.
Dans tout l'exercice A est un élément de S, $A \ne I$.

Première partie

1° Soit B un élément de S. Prouver que AB appartient à S.

2° Montrer que pour tout k entier naturel, A^k appartient à S.

3° Soit X un élément de F. Démontrer que $\|AX\| \le \|X\|$. En déduire pour tout k entier naturel, $\left\|A^k X\right\| \le \|X\|$.

4° Montrer que 1 est valeur propre de A.

5° Soit λ une valeur propre complexe de A, montrer que : $|\lambda| \le 1$.

6° Soit λ une valeur propre complexe de A, telle que $|\lambda| = 1$.

a) Soit X un élément de $Ker(A-\lambda I)^2$. On pose : $Y=(A-\lambda I)X$.

i) Etablir que, pour tout k entier naturel, $k \ge 2$, $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$.

ii) En déduire que $Y=0$ (on pourra utiliser l'inégalité établie à la question 3° de la première partie).

iii) Prouver que $Ker(A-\lambda I)^2 = Ker(A-\lambda I)$.

b) En déduire que, pour tout k entier naturel, $k \ge 2$, on a :

$$Ker(A-\lambda I)^k = Ker(A-\lambda I).$$

Deuxième partie

On suppose que A admet $r+1$ valeurs propres complexes deux à deux distinctes, on les note $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$, avec $\lambda_0 = 1$.

Dans toute cette partie p désigne un entier naturel non nul.

Pour X élément de F, on pose : $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p} A^k X$. On veut étudier la convergence, quand p tend vers $+\infty$, de la suite (X_p) dans F.

1° Soit λ une valeur propre complexe de A , $\lambda \neq 1$.

a) Prouver que : $\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right) = 0$.

b) On suppose que X est un élément de $Ker(A-\lambda I)$. Montrer que la suite (X_p) converge vers 0.

2° On suppose, dans cette question, que A est diagonalisable.

Soit X un élément quelconque de F. Démontrer que la suite (X_p) converge vers un élément de $Ker(A-I)$.

3° On s'intéresse dans cette question à une valeur propre complexe λ de A vérifiant : $|\lambda| < 1$.

Soit X un élément de $Ker(A-\lambda I)^q$, où q est un entier naturel, $q \geq 2$.

a) Soit k un entier naturel, $k \geq q$. Montrer que :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j \quad \text{et que} \quad A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X .$$

On rappelle que $C_k^j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}$.

b) Prouver que, pour tout j élément de $\{0,1,....,q-1\}$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} C_k^j \lambda^{k-j} = 0 .$$

c) Démontrer que la suite (X_p) converge vers 0.

4° On suppose que le polynôme caractéristique de A, noté $P_A(T)$, est égal à :

$P_A(T) = (-1)^n \prod_{j=0}^{s}(T-\lambda_j)^{k_j} \prod_{j=s+1}^{r}(T-\lambda_j)^{q_j}$ où $s, k_0, \ldots, k_s, q_{s+1}, \ldots, q_r$ sont des entiers naturels non nuls avec $s < r$ et où $|\lambda_j| = 1$ si et seulement si $j \leq s$.

a) Prouver que F est égal à la somme directe de sous espaces vectoriels suivante :

$$F = Ker(A-\lambda_0 I) \oplus .. \oplus Ker(A-\lambda_s I) \oplus Ker(A-\lambda_{s+1} I)^{q_{s+1}} \oplus .. \oplus Ker(A-\lambda_r I)^{q_r} .$$

b) Soit X un élément quelconque de F. Etudier la convergence de la suite (X_p).