

ORAUX BLANCS (L1 BIO)  
2011-2012

**Exercice 1**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $2y' + 3y = \cos(t)$

Indication : on pourra chercher une solution particulière parmi les fonctions de la forme  $f(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ .

**Exercice 2**

Donner une primitive de  $\frac{x}{(1+x^2)^2} \ln(x)$ .

**Exercice 3**

Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$ .

**Exercice 4**

Décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{(x^2+x+1)(x+1)^2}$ .

**Exercice 5**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 6**

$DL_2(0)$  de  $\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2}$ .

**Exercice 7**

$DL_4(0)$  de  $f(x) = \ln(1+x)^2$ .

**Exercice 8**

Donner une primitive de  $\frac{1}{1+x^3}$

**Exercice 9**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' - 3y' + 2y = \cos(t)$ .

**Exercice 10**

Décomposition en éléments simples de  $\frac{x^2}{(x^2+1)(x-1)}$ .

**Exercice 11**

$DL_3(0)$  de  $\frac{1}{x^2+1} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)$ .

**Exercice 12**

Montrer que pour tout  $x > 0$  on a  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ . En déduire  $\int_{-1}^1 \arctan(e^x) dx$  (on pourra poser  $t = -x$ ).

**Exercice 13**

$DL_4(0)$  de  $(1+x)^x$ .

**Exercice 14**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $x^3 y' - x^2 y = 1$ .

**Exercice 15**

Calculer l'intégrale  $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2} dx$  (on pourra commencer par faire une décomposition en éléments simples).

**Exercice 16**

Décomposition en éléments simples de  $\frac{x}{x^4-3x^2+2}$

**Exercice 17**

Soit  $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  (on pourra faire un développement limité).

**Exercice 18**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'^2 + y^2 = 1$  (Indication : dériver).

**Exercice 19**

$DL_2(0)$  de  $(2+2x)^{1/(1+x)}$

**Exercice 20**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' - 3y' + 2y = te^t$ .

**Exercice 21**

Donner une primitive de  $\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)^2}$  (on pourra se ramener à une primitive de fraction rationnelle).

**Exercice 22**

Décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{(x^2+1)^2-x^2}$

**Exercice 23**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $(1+x)y' + y = (1+x)\sin(x)$ .

**Exercice 24**

Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x$  (on pourra faire un développement limité).

**Exercice 25**

$DL_4(0)$  de  $f(x) = \ln(\sin(x)/x)$ .

**Exercice 26**

Donner une primitive de  $x^2 \arctan(x)$ .

**Exercice 27**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' - 2y' = (x^2 + 1)e^{2x}$ .

**Exercice 28**

Décomposition en éléments simples de  $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

**Exercice 29**

Donner une primitive de  $\ln(1+x^2)$ .

**Exercice 30**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $xy' - 2y = \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 31**

$DL_2(0)$  de  $(1 + \sin(x))^{1/x}$

**Exercice 32**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$  sur  $]0, 1[$ .

**Exercice 33**

Donner une primitive de  $\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)^2}$  (on pourra se ramener à une primitive de fraction rationnelle).

**Exercice 34**

Décomposition en éléments simples de  $\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$ .

**Exercice 35**

Donner une primitive de  $(x^2 + x + 1) \arctan(x)$ .

**Exercice 36**

$DL_4(\infty)$  de  $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \ln(x)$ .

**Exercice 37**

$DL_4(0)$  de  $\cos(x) \ln(1 + x)$

**Exercice 38**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' - 3y' - 4y = 2x \sinh(x)$  (on pourra utiliser le principe de superposition).

**Exercice 39**

Calculer

$$I = 12 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 - 1} dt.$$

On pourra faire le changement de variable  $u = \cos(t)$ .

**Exercice 40**

$DL_3(1)$  de  $f(x) = \frac{2x \ln(x)}{x-1}$ . Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ?

**Exercice 41**

Donner une primitive de  $\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$  (on pourra faire une décomposition en éléments simples).

**Exercice 42**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$ .

**Exercice 43**

$DL_2(0)$  de  $(\sin x - 1)/(\cos x + 1)$ .

**Exercice 44**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' - 3y' + 2y = \cos(t) + te^t$ .

**Exercice 45**

Donner une primitive de  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$ .

**Exercice 46**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation  $y' + y = \cos(t)$

Indication : on pourra chercher une solution particulière parmi les fonctions de la forme  $f(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ .

**Exercice 47**

$DL_3(1)$  de  $f(x) = \frac{2x \ln(x)}{x-1}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**Exercice 48**

Trouver une primitive de  $\sqrt{1-x^2}$  (on pourra utiliser le changement de variable  $x = \sin(t)$ ).

**Exercice 49**

$DL_3(0)$  de  $f(x) = e^x / \sqrt{1+x}$

**Exercice 50**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = x^2 + x + 1$ .

**Exercice 51**

Donner une primitive de  $\frac{1}{\cosh(x)}$  (on pourra se ramener à calculer une primitive de fraction rationnelle)

**Exercice 52**

Donner une expression simplifiée de  $\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}$ .

**Exercice 53**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle

$$y' - 3y = (3t^2 + 1)e^{2t}.$$

**Exercice 54**

Trouver une primitive de  $\cos(\ln(x))$ .

**Exercice 55**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $2y' + 3y = \sin(t)$

Indication : on pourra chercher une solution particulière parmi les fonctions de la forme  $f(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ .

**Exercice 56**

$DL_5(0)$  de  $\sqrt{2 - \sqrt{1 - x^2}}$

**Exercice 57**

Donner une primitive de  $\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin(x)^2}$  (on pourra utiliser le changement de variable  $u = \tan(2x)$ ).

**Exercice 58**

$DL_2(0)$  de  $(1 + 2x)^{1/(1+x)}$ .

**Exercice 59**

Donner une primitive de  $\frac{x^4}{x^2+1} \arctan(x)$ .

**Exercice 60**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y' + y = 2 \sin(t)$

**Exercice 61**

$DL_4(0)$  de  $\frac{1}{x} (\ln(\sqrt{1+x}) - \ln(\sqrt{1-x}))$ .

**Exercice 62**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 2x^2 \cosh(x)$  (on pourra utiliser le principe de superposition).

**Exercice 63**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :

$$(1 + t^2)y' - 2ty = 1 - t^2.$$

(on vérifiera que  $\frac{t}{1+t^2}$  est une primitive de  $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ ).

**Exercice 64**

Décomposition en éléments simples de  $x^3 / ((x^2 + 1)(x - 1))$

**Exercice 65**

Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle  $ch(x)y' - sh(x)y = sh(x)^3$ .

**Exercice 66**

$DL_2(0)$  de  $f(x) = \ln(\cos(x))/x^2$ . Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ?

**Exercice 67**

Donner une primitive de  $\frac{1}{\sinh(x)}$  (on pourra se ramener à calculer une primitive de fraction rationnelle)