X2015 – MAP 311

PC 4 – Lundi 23 mai 2016 – Vecteurs de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Méthode de la fonction muette (pour des vecteurs de v.a.)

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites. Déterminer la loi de $\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 3. (Pale 2013) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\alpha + 1/2, \lambda)$, avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On pose $(V, W) = (\sqrt{XY}, \sqrt{Y})$. Déterminer la loi de (V, W).

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est (c.f. Section 4.6.3 du poly)

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}, \qquad \text{avec} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z} dz.$$

2 Méthode de rejet

Exercice 4. Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure ou égale à s euros. On suppose que les offres $(X_1, X_2, \ldots)$ sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable aléatoire X.

(1) Soit $N \geq 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison. Quelle est la loi de N ?

(2) Déterminer la loi du prix de vente X_N de la maison, et montrer que le prix de vente est indépendant de N.

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

3 Lois conditionnelles

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur $\mathbb{R}^2$ tel que :

- X suit une loi $\Gamma(2, \lambda)$ (de densité $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$),
- la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme sur le segment $[0, X]$ (ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0<y<x}$).

(1) Déterminer la densité de (X, Y) ainsi que la loi de Y.

(2) Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.

(3) Calculer les quantités suivantes :

(a) $\mathbb{E}[Y|X]$,

(b) $\mathbb{E}[X|Y]$,

(c) $\mathbb{E}[X + XY|Y]$,

(d) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$,

(e) $\mathbb{E}[XY]$ (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{E}[X^2] = \frac{6}{\lambda^2}$).

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

(1) Montrer que
$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X].$$

(2) Plus généralement, montrer que $\mathbb{E}[h(X, Y)|X] = \Phi(X)$, avec
$$\Phi(x) = \mathbb{E}[h(x, Y)].$$

Exercice 7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$ avec $n \geq 2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Identifier la loi de S_n comme une loi (presque) classique.

(2) Trouver la densité conditionnelle de X_1 sachant que $S_n = t$.

(3) En déduire la valeur de l'espérance conditionnelle de X_1 sachant S_n. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

4 Vecteurs gaussiens

Exercice 8. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?

(2) Quelle eſt la loi de (X_1, X_2) ?

(3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(X_2, X_2 + aX_1)$ eſt un vecteur gaussien.

(4) En choisissant a de sorte que X_2 et $X_2 + aX_1$ soient indépendants, calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$.

5 À chercher pour la prochaine fois (lundi 30 mai)

Exercice 9. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$, avec $a, b, \lambda \in]0, \infty[$.

(1) Calculer la loi du couple $\left(X + Y, \frac{X}{X+Y}\right)$.

(2) Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et identifier leurs lois.

6 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 10. **(Simulation d'une loi de Poisson)** Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme, et soit $\lambda > 0$. On pose $E_n = -\ln(U_n)/\lambda$ pour tout $n \geq 1$ et

$$T_n = E_1 + \cdots + E_n.$$

(1) Identifier la loi de $(E_i)_{1\leq i\leq n}$, puis la loi de T_n comme une loi (presque) classique.

(2) On pose $N = \min\{n \geq 0 : U_1 U_2 \cdots U_{n+1} < e^{-\lambda}\}$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 11. **(Pale 2014)** On considère le jeu de la courte paille entre deux joueurs. Une troisième personne choisit un bâton puis elle le coupe en deux. Elle présente alors les deux morceaux aux joueurs en cachant la différence de longueur dans sa main. Le premier joueur choisit un morceau et le second prend l'autre. Celui qui a le morceau le plus long gagne. La longueur U du bâton eſt supposée suivre la loi uniforme sur $[0, 1]$ et les deux morceaux finaux ont pour longueur $X = UV$ et $Y = U(1 - V)$ avec V de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de U.

(1) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(2) Donner la loi de $-\ln(U)$. En déduire sans calcul que $\xi = -\ln(X)$ suit la loi $\Gamma(2, 1)$. Déterminer la loi de X.

(3) Quelle eſt la loi de (X, Y) (faire attention au domaine image du changement de variables) ? Les longueurs des morceaux sont-elles indépendantes ? Comparer les lois de (Y, X) et de (X, Y). Le jeu eſt-il équitable ? Retrouver la densité de X.

7 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 12. **(Réarrangement croissant de variables uniformes)** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. L'exercice 14 de la PC 3 montre qu'il existe une permutation aléatoire σ telle que

$$\mathbb{P}\Big(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\Big) = 1$$

et que la loi de σ est uniforme sur l'ensemble des permutations de longueur n. On pose

$$(Y_1, \dots, Y_n) = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

(1) Déterminer la loi de $(Y_1, \dots, Y_n)$.

(2) Déterminer la loi de $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Exercice 13. (**Réarrangement croissant de lois exponentielles**) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On considère des variables aléatoires $(E_i)_{1 \le i \le n}$ indépendantes telles que E_k suit une loi exponentielle de paramètre λ_k. On note

$$E_{(1)} \le E_{(2)} \le \cdots \le E_{(n)}$$

les variables aléatoires $(E_i)_{1 \le i \le n}$ réarrangées dans l'ordre croissant.

(1) Montrer que $E_{(1)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}\Big(E_{(1)} < E_{(2)}\Big) = 1$ (ainsi le minimum des variables est atteint une unique fois presque sûrement).

(3) On note $N = \min\{1 \le i \le n : E_i = E_{(1)}\}$. Montrer que N et $E_{(1)}$ sont indépendants, et que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$ pour tout $1 \le k \le n$.

Exercice 14. (**Processus de Poisson**) Soit $(X_n, n \ge 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \ge 1$,

$$T_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Pour tout $t \ge 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \ge 0 : T_n \le t\}.$$

(1) Soit $n \ge 1$. Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \dots, T_n)$.

(2) En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.

(3) Pour $n \ge 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \dots, T_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.