

PC 4 – Lundi 15 mai 2017 – Vecteurs de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur <http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311> un peu après la PC.**1 Méthode de la fonction muette (pour des vecteurs de v.a.)**

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites. Déterminer la loi de $\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites. Déterminer la loi de X/Y .

2 Méthode de rejet

Exercice 3. Soit $s > 0$ fixé. Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure ou égale à s euros. On suppose que les offres (X_1, X_2, \dots) sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable aléatoire X .

- (1) Soit $N \geq 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison. Quelle est la loi de N ?
- (2) Déterminer la loi du prix de vente X_N de la maison, et montrer que le prix de vente est indépendant de N .

3 Lois conditionnelles

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur \mathbb{R}^2 tel que :

- X suit une loi $\Gamma(2, \lambda)$ (de densité $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$),
- la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme sur le segment $[0, X]$ (ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0 < y < x}$).

- (1) Déterminer la densité de (X, Y) ainsi que la loi de Y .
- (2) Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y .
- (3) Calculer les quantités suivantes :

(a) $\mathbb{E}[Y|X]$,

(d) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$,

(b) $\mathbb{E}[X|Y]$,

(e) $\mathbb{E}[XY]$ (on pourra utiliser le fait que

(c) $\mathbb{E}[X + XY|Y]$,

$\mathbb{E}[X^2] = \frac{6}{\lambda^2}$).

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

4 Vecteurs gaussiens

Exercice 5. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
- (2) Quelle est la loi de (X_1, X_2) ?
- (3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(X_2, X_2 + aX_1)$ est un vecteur gaussien.
- (4) En choisissant a de sorte que X_2 et $X_2 + aX_1$ soient indépendants, calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $a > 0$, on pose $Y_a = X\mathbb{1}_{|X|<a} - X\mathbb{1}_{|X|\geq a}$.

- (1) Montrer que Y_a est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- (2) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\text{Cov}(X, Y_a) = 0$. Les variables aléatoires X et Y_a sont-elles alors indépendantes? Le vecteur (X, Y_a) est-il un vecteur gaussien?

5 À chercher pour la prochaine fois (lundi 22 mai)

Exercice 7. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$, avec $a, b, \lambda \in]0, \infty[$.

- (1) Calculer la loi du couple $(X + Y, \frac{X}{X+Y})$.
- (2) Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et identifier leurs lois.

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est (c.f. Section 4.6.3 du poly) $\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$ avec $\Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z} dz$.

6 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 8. (Erreurs dans la mesure de la position d'une étoile & Loi de Herschel (1850))
Pour repérer une étoile on utilise deux nombres, l'ascension droite x (équivalent sur la sphère céleste de la longitude terrestre) et la déclinaison y (équivalent sur la sphère céleste de la latitude terrestre). À cause des erreurs de mesure, on modélise l'ascension droite par une variable aléatoire réelle X et la déclinaison par une variable aléatoire réelle Y .

Déterminer $f_{(X,Y)}$, la densité de (X, Y) , en faisant les hypothèses naturelles suivantes :

- (1) $f_X = f_Y = f$ (densité de probabilité commune f , de classe C^1);

- (2) X et Y sont indépendantes;
- (3) Il existe une fonction g de classe C^1 telle que $f_{(X,Y)}(x,y) = g(x^2 + y^2)$ pour tous x, y (commenter cette hypothèse).

Exercice 9. (Pale 2014) On considère le jeu de la courte paille entre deux joueurs. Une troisième personne choisit un bâton puis elle le coupe en deux. Elle présente alors les deux morceaux aux joueurs en cachant la différence de longueur dans sa main. Le premier joueur choisit un morceau et le second prend l'autre. Celui qui a le morceau le plus long gagne. La longueur U du bâton est supposée suivre la loi uniforme sur $[0, 1]$ et les deux morceaux finaux ont pour longueur $X = UV$ et $Y = U(1 - V)$ avec V de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de U .

- (1) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$.
- (2) Donner la loi de $-\ln(U)$. En déduire sans calcul que $\xi = -\ln(X)$ suit la loi $\Gamma(2, 1)$. Déterminer la loi de X .
- (3) Quelle est la loi de (X, Y) (faire attention au domaine image du changement de variables)? Les longueurs des morceaux sont-elles indépendantes? Comparer les lois de (Y, X) et de (X, Y) . Le jeu est-il équitable? Retrouver la densité de X .

Exercice 10. (Simulation d'une loi de Poisson) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme, et soit $\lambda > 0$. On pose $E_n = -\ln(U_n)/\lambda$ pour tout $n \geq 1$ et $T_n = E_1 + \dots + E_n$.

- (1) Identifier la loi de $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$, puis la loi de T_n comme une loi (presque) classique.
- (2) On pose $N = \min\{n \geq 0 : U_1 U_2 \dots U_{n+1} < e^{-\lambda}\}$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

7 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 11. (Pale 2013) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\alpha + 1/2, \lambda)$, avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On pose $(V, W) = (\sqrt{XY}, \sqrt{Y})$. Déterminer la loi de (V, W) .

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est (c.f. Section 4.6.3 du poly) $\frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$ avec $\Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z} dz$.

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, $\mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$ pour un certain $p \geq 1$ et $\mathbb{E}[Y] = 0$. Montrer $\mathbb{E}[|X + Y|^p] \geq \mathbb{E}[|X|^p]$.

Indication. On pourra montrer que $g : y \mapsto \mathbb{E}[|X + y|^p]$ est convexe et utiliser l'exercice 15 de la PC 3, qui dit que lorsque X et Y sont indépendants, on a $\mathbb{E}[F(X, Y)] = \mathbb{E}[G(Y)]$ où G est la fonction définie par $G(y) = \mathbb{E}[F(X, y)]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$ avec $n \geq 2$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- (1) Identifier la loi de S_n comme une loi (presque) classique.
- (2) Trouver la densité conditionnelle de X_1 sachant que $S_n = t$.
- (3) En déduire la valeur de l'espérance conditionnelle de X_1 sachant S_n . Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

Exercice 14. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur \mathbb{R}^2 . On suppose que X et Y sont indépendantes.

- (1) Montrer que $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.
- (2) Plus généralement, montrer que $\mathbb{E}[h(X, Y)|X] = \Phi(X)$, avec $\Phi(x) = \mathbb{E}[h(x, Y)]$.

Exercice 15. (Réarrangement croissant de variables uniformes) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. L'exercice 14 de la PC 3 montre qu'il existe une permutation aléatoire σ telle que $\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(n)}) = 1$ et que la loi de σ est uniforme sur l'ensemble des permutations de longueur n . On pose

$$(Y_1, \dots, Y_n) = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- (1) Déterminer la loi de (Y_1, \dots, Y_n) .
- (2) Déterminer la loi de $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Exercice 16. (Réarrangement croissant de lois exponentielles) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On considère des variables aléatoires $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes telles que E_k suit une loi exponentielle de paramètre λ_k . On note $E_{(1)} \leq E_{(2)} \leq \dots \leq E_{(n)}$ les variables aléatoires $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ réarrangées dans l'ordre croissant.

- (1) Montrer que $E_{(1)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
- (2) Montrer que $\mathbb{P}(E_{(1)} < E_{(2)}) = 1$ (ainsi le minimum des variables est atteint une unique fois presque sûrement).
- (3) On note $N = \min\{1 \leq i \leq n : E_i = E_{(1)}\}$. Montrer que N et $E_{(1)}$ sont indépendants, et que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Exercice 17. (Processus de Poisson) Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $T_n = X_1 + \dots + X_n$. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

- (1) Soit $n \geq 1$. Calculer la loi du n -uplet (T_1, \dots, T_n) .
- (2) En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.
- (3) Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Calculer la loi du n -uplet (T_1, \dots, T_n) sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.