X2016 – MAP 311

PC 5 – Lundi 22 mai 2017 – Convergences de variables aléatoires

Corrigé des questions non abordées en PC

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311 *un peu après la PC.*

1 Convergence presque sûre

Exercice 4. **(Pollen)** On modélise l'évolution discrétisée d'une particule de pollen entre deux plaques absorbantes comme suit. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $k \geq 1$ un entier. On pose $S_0 = k$ et pour tout $n \geq 1$

$$S_n = k + X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $T = \inf\{i \geq 1 : S_i = 0 \text{ ou } S_i = 2k\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

(1) Montrer que $T < \infty$ presque sûrement.

(2) On pose $Z_n = S_{\min(n,T)}$. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi. Est-ce que Z_n converge en probabilité ? En moyenne ?

Corrigé :

(1) S'il y a $2k$ montées successives, alors $T < \infty$. Une application du lemme de Borel-Cantelli (semblable à celle au singe savant) montre que dans la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ la suite 1 apparaît $2k$ fois de suite une infinité de fois presque sûrement. Donc $\mathbb{P}(T < \infty)$.

(2) Comme $T < \infty$ presque sûrement, Z_n converge presque sûrement vers S_T. Donc Z_n converge également en probabilité vers S_T (la convergence p.s. implique la convergence en probabilité). Comme $|Z_n| \leq 2k$, la suite converge également en moyenne.

Par symétrie,

$$\mathbb{P}(S_T = 0) = \mathbb{P}(S_T = 2k) = \frac{1}{2}.$$

Rédigeons cet argument formellement. Soit Φ l'application qui transforme une marche sur $\mathbb{Z}$ qui fait des sauts ± 1 en la marche obtenue en changeant les sauts $+1$ en sauts -1 et les sauts -1 en sauts $+1$. Notons $(S'_n)_{n\geq 0} = \Phi((S_n)_{n\geq 0})$ et $T' = \inf\{i \geq 1 : S'_i = 0 \text{ ou } S'_i = 2k\}$. Alors, par construction, $S_T = 0$ si et seulement si $S'_{T'} = 2k$. De plus, $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S'_n)_{n\geq 0}$ ont la même loi. Donc $\mathbb{P}(S_T = 0) = \mathbb{P}\left(S'_{T'} = 2k\right) = \mathbb{P}(S_T = 2k)$. Comme $\mathbb{P}(S_T = 0) + \mathbb{P}(S_T = 2k) = 1$, le résultat voulu en découle.

□

2 Convergence en probabilité

Exercice 5. **(Le retour du RER B)** On suppose que le temps d'attente du RER B suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Si on prend le RER B n fois, comment se comporte le temps maximal d'attente lorsque $n \to \infty$? Pour modéliser

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

cela, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on s'intéresse à la quantité $\max_{1\leq k\leq n} X_k$.

Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

Corrigé : Par définition de la convergence en probabilité, il s'agit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{1}{\lambda}\right| > \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrons d'abord que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour $\epsilon < 1/\lambda$. Par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \epsilon\right) = (1-\exp(-(1-\lambda\epsilon)\ln n))^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{n^{\epsilon\lambda}}{n}\right)\right) \leq e^{-n^{\epsilon\lambda}} \to 0.$$

Ensuite, en passant au complémentaire,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k > \frac{1}{\lambda} + \epsilon\right) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < (1/\lambda+\epsilon)\ln(n))^n = 1-\left(1-\frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)^n.$$

Or

$$1-\left(1-\frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)^n = 1-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\epsilon\lambda}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

3 Convergence dans $\mathbb{L}^1$ (en moyenne)

Exercice 6. (**Un exemple**) Soit $\alpha > 0$, et soit $(Z_n, n\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Est-ce que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité ? Est-ce que la suite (Z_n) converge presque-sûrement ?

Corrigé : On a,

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n^\alpha} \to 0,$$

ce qui signifie que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Donc $Z_n \to 0$ en probabilité car la convergence en moyenne implique la convergence en probabilité.

Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n = \{Z_n = 1\}$. Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ c'est-à-dire p.s., il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $Z_n = 0$ et ainsi $Z_n \to 0$ presque sûrement

Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Les A_n étant indépendants, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ c'est-à-dire p.s $Z_n = 1$ une infinité de fois. On a aussi $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \infty$, donc p.s. $Z_n = 0$ une infinité de fois. Donc Z_n ne converge pas presque sûrement. □

Exercice 7. **(Petite astuce)** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Montrer que $\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{|X|>n}\right] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Corrigé : Posons $Y_n = X\mathbb{1}_{|X|>n}$. Alors :

– Y_n converge presque sûrement vers 0

– $|Y_n| \le |X|$, qui est une variable aléatoire positive intégrable et qui ne dépend pas de n.

D'après le théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[0] = 0$. □

5 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 9. (**Biais par la taille**) On considère une population comportant un grand nombre n de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le n}$ indépendantes de même loi sur $\mathbb{N}^*$, de moyenne $m = \mathbb{E}[X_1] = \sum_{k\ge 1} kp_k < \infty$ avec $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$. Soit T la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que pour tout entier $k \ge 1$, $\mathbb{P}(T = k)$ converge vers $\frac{k}{m}p_k$ lorsque $n \to \infty$.

Indication. On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(T = k|X_1,\dots,X_n)$.

Corrigé : La population compte au total $X_1 + \cdots + X_n$ individus. On modélise le choix d'un individu au hasard par le tirage, conditionnellement à $X_1,\dots,X_n$ (c'est-à-dire sachant $X_1,\dots,X_n$), d'un entier selon la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,\dots,X_1+\cdots+X_n\}$. Pour tout $k \ge 1$, il y a $N_k := \mathbb{1}_{\{X_1=k\}} + \cdots + \mathbb{1}_{\{X_n=k\}}$ foyers de taille k qui comptent au total kN_k individus. Par conséquent, par définition de la loi uniforme (formule « cas favorables sur cas totaux ») :

$$\mathbb{P}(T = k|X_1,\dots,X_n) = \frac{k\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i=k\}}}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{k\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i=k\}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Donc, d'après la loi forte des grands nombres,

$$\mathbb{P}(T = k|X_1,\dots,X_n) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} \quad \frac{k}{m}p_k.$$

Posons $F(X_1,\dots,X_n) = \mathbb{P}(T = k|X_1,\dots,X_n)$, de sorte que $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{E}[F(X_1,\dots,X_n)]$ (plus généralement, $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U|V]]$). D'après ce qu'on vient de voir, $F(X_1,\dots,X_n)$ converge presque sûrement vers $\frac{k}{m}p_k$ en étant dominé par 1 (car c'est une probabilité conditionnelle), intégrable. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{E}[F(X_1,\dots,X_n)] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{k}{m}p_k.$$

Interprétation. La loi de T n'est pas la loi de départ, car les grands foyers sont sur-représentés tandis que les petits foyers sont sous-représentés. Ce phénomène est appelé *biais par la taille* Il s'agit sans doute du biais d'échantillonnage le plus connu. Le biais est d'autant plus important que la taille du foyer diffère de la taille moyenne m. □

Exercice 10. (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k, k \ge 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1,2,\dots,n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \ge 1 : \{X_1,\dots,X_m\} = \{1,2,\dots,n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

(1) Soit $\tau_k^n = \inf\{m \ge 1 : |\{X_1,\dots,X_m\}| = k\}$ pour tout $k \ge 1$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\le k\le n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.

(2) En déduire que la convergence $\frac{T_n}{n\log n} \to 1$ a lieu en probabilité.

Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.

Corrigé :

(1) La quantité $\tau_k^n - \tau_{k-1}^n$ représente le temps mis pour obtenir un nouvel élément une fois qu'on en a obtenu $k-1$. Intuitivement, ces variables sont indépendantes et suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$ (il reste $n-(k-1)$ éléments).

Pour le démontrer formellement, on peut procéder comme suit. On a $\tau_1^n = 1$. Soit $(t_2,\dots,t_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \dots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)$. En posant $t_1 = 1$ et en notant $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \dots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{k=1}^{n-1} \Big\{ X_{t_1+\dots+t_k} = \sigma(k), X_{t_1+\dots+t_k+1} \in \{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\}, \dots, \\
&\qquad\qquad X_{t_1+\dots+t_k+t_{k+1}-1} \in \{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\} \Big\} \cap \{X_{t_1+\dots+t_n} = \sigma(n)\}\Bigg) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{t_k - 1} \\
&= \frac{n!}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{t_k - 1} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n}\right)\left(\frac{k-1}{n}\right)^{t_k - 1}.
\end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \le k \le n}$ sont indépendantes, et ont respectivement pour loi

$$\mathbb{P}\left(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n = i\right) = \left(\frac{n+1-k}{n}\right)\left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1} = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)\left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)^{i-1} \qquad \text{pour } i \ge 1.$$

Cette loi est bien la loi de G_k où G_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$.

(2) On a $T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$\mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1},$$

où H_n est la série harmonique et

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)/n}{((n+1-k)/n)^2} = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k^2} \le Cn^2$$

avec $C = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^2}$. Donc pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \ge \epsilon n \log(n)\right) \le \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{\epsilon^2 n^2 \log(n)^2} \le \frac{C}{\epsilon^2 \log(n)^2}.$$

Donc $(T_n - \mathbb{E}(T_n))/(n\log(n)) \to 0$ en probabilité. Or $\mathbb{E}(T_n) \sim n\log(n)$ quand $n \to \infty$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \ge 2\epsilon n \log(n)\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \ge \epsilon n \log(n)\}$ pour n assez grand. On obtient ainsi le résultat.

□

6 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 11. **(Lois exponentielles de grand paramètre)** Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire exponentielle de paramètre n. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Corrigé : Soit $\epsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(Z_n > \epsilon) = e^{-n\epsilon}$. Donc

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z_n > \epsilon) < \infty.$$

D'après le (premier) lemme Borel Cantelli, pour tout $\epsilon > 0$, presque sûrement, à partir d'un certain rang on a $Z_n \leq \epsilon$. Donc presque sûrement, pour entier $k \geq 1$, à partir d'un certain rang $0 \leq Z_n \leq 1/k$. On en déduit que Z_n converge presque sûrement vers 0.

Attention. On a effectué une interversion du pour tout $\epsilon > 0$ et du presque sûrement ! Ici, cela a été rendu possible en se restreignant à une suite dénombrable. □

Exercice 12. **(Extension du théorème de convergence dominée)** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que X_n converge en probabilité vers X. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive et intégrable Z, indépendante de n, telle que $|X_n| \leq Z$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X_n converge vers X en moyenne.

Indication. On pourra utiliser que si Y_n converge en probabilité vers Y alors il existe une sous-suite de Y_n qui converge presque sûrement vers Y.

Corrigé : Tout d'abord, montrons que $|X| \leq Z$ presque sûrement. Comme X_n converge en probabilité vers X, il existe une sous-suite $X_{\phi(n)}$ qui converge presque sûrement vers X. Comme $|X_{\phi(n)}| \leq Z$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit que $|X| \leq Z$ presque sûrement.

On en déduit que la suite $\mathbb{E}[|X_n - X|]$ est bornée, car $\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \mathbb{E}[|X_n|] + \mathbb{E}[|X|] \leq 2\mathbb{E}[Z]$. Pour montrer que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$, il suffit donc de montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite $\mathbb{E}[|X_n - X|]$.

Pour cela, soit ϕ une extraction telle que $\mathbb{E}\left[|X_{\phi(n)} - X|\right] \to \ell$. Comme $X_{\phi(n)}$ converge aussi en probabilité vers X lorsque $n \to \infty$, il existe une extraction ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge presque sûrement vers X lorsque $n \to \infty$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominé usuel pour en déduire que $\mathbb{E}\left[|X_{\phi(\psi(n))} - X|\right] \to 0$. Donc $\ell = 0$, ce qui conclut. □

Exercice 13. **(Convergences joitns en probabilité)** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers X et soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers Y. Montrer que (X_n, Y_n) converge en probabilité vers (X, Y).

Corrigé : Pour tout $\epsilon > 0$, on remarque que si

$$\|(X_n, Y_n) - (X, Y)\| \geq 2\epsilon.$$

alors $|X_n - X| \geq \epsilon$ ou $|Y_n - Y| \geq \epsilon$. En effet, par l'absurde, si $|X_n - X| < \epsilon$ et $|Y_n - Y| < \epsilon$, alors

$$\|(X_n, Y_n) - (X, Y)\| \leq \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2} = \sqrt{2}\epsilon < 2\epsilon.$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\|(X_n, Y_n) - (X, Y)\| \geq 2\epsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

d'où le résultat. □

Exercice 14. **(Lemme de Scheffé)** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires **positives** qui convergent presque sûrement vers X. On suppose que $\mathbb{E}[X] < \infty$ et que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$. Le but de cet exercice est de démontrer que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$.

On pose $Y_n = \min(X_n, X)$ et $Z_n = \max(X_n, X)$.

(1) Démontrer que $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Démontrer que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra écrire que $Z_n = X + X_n - Y_n$.

(3) Conclure que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra écrire que $|X_n - X| = Z_n - Y_n$.

Corrigé :

(1) Y_n converge presque sûrement vers X, en étant majoré par X. Donc $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X]$ d'après le théorème de convergence dominée.

(2) On a $\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$.

(3) On a $\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[Z_n] - \mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0$.

□

Exercice 15. **(Croissance)** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ telle que X_n/c_n converge presque sûrement vers 0.

Corrigé : Soit $n \geq 1$, comme la fonction de répartition de $|X_n|$ tend vers 1 en ∞, il existe $c_n > 0$ suffisamment grand tel que $\mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{c_n}{n}\right) \leq 2^{-n}$. Montrons que (c_n) convient.

D'après le (premier) lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{c_n}\right| > \epsilon\right)$ converge. Alors, pour $n > 1/\epsilon$ (de sorte que $\epsilon > 1/n$),

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{c_n}\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{c_n}\right| > \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

par définition de c_n. D'où le résultat. □

Exercice 16. **(Dichotomie)** Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi.

(1) Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.

(2) Montrer que pour tout α on a $\alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}[X] < \alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) + \alpha$.
Indication. On pourra montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)).$$

(3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

(4) En déduire la dichotomie suivante : presque sûrement,

$$\text{la plus grande valeur d'adhérence de } \frac{X_n}{n} \text{ vaut } \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

Corrigé :

(1) Tout d'abord, si X_1 est presque sûrement nulle, alors $\sum_{n\geq 1} X_n = 0$ p.s. Supposons que X_1 n'est pas nulle, alors on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1 > \epsilon) > 0$. On a alors que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = \infty$, et les X_n sont indépendants, donc par le (deuxième) lemme Borel-Cantelli, p.s. les X_n sont supérieurs à ϵ une infinité de fois, donc $\sum_{n\geq 1} X_n = \infty$.

(2) Soit X une v.a. positive et $\alpha > 0$. On vérifie aisément les encadrements de X suivants :

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{1}_{\alpha n \leq X < \alpha(n+1)} \leq X \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{1}_{\alpha n \leq X < \alpha(n+1)}.$$

En prenant l'espérance de la ligne précédente on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \alpha n(\mathbb{P}(X \geq \alpha n) - \mathbb{P}(X \geq \alpha(n+1))) &\leq \mathbb{E}[X] \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)(\mathbb{P}(X \geq \alpha n) - \mathbb{P}(X \geq \alpha(n+1)))\end{aligned}$$

En reconnaissant des sommes téléscopiques, on en déduit que

$$\alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}[X] < \alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) + \alpha.$$

(3) C'est une conséquence immédiate de la question précédente.

(4) Soit $\alpha > 0$. La plus grande valeur d'adhérence de $\frac{X_n}{n}$ est supérieure ou égale à α si et seulement si il existe une infinité de n tels que $X_n \geq \alpha n$. D'après la question précédente,

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \quad \begin{cases} < \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ = \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases},$$

donc, d'après les deux lemmes de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\text{la plus grande valeur d'adhérence de } \frac{X_n}{n} \geq \alpha\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ 1 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}$$

et par conséquent

$$\text{la plus grande valeur d'adhérence de } \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases} \quad \text{p.s.}$$

□

Exercice 17. **(Loi forte des grands nombres, cas non intégrable)**s Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que si X_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Indication. On pourra utiliser la question (3) de l'exercice 16 et montrer que si S_n/n converge alors $X_n/n \to 0$.

Corrigé : On a $\mathbb{P}(|X_1| \geq n) = \mathbb{P}(|X_n| \geq n)$. Comme X_1 n'est pas intégrable, d'après la question (3) de l'exercice 16 on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = +\infty$. Les événements $\{|X_n| \geq n\}$ étant indépendants, on a $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| \geq n\}) = 1$ d'après le lemme de Borel-Cantelli.

Ensuite, on remarque que

$$\left\{\frac{S_n}{n} \text{ a une limite réelle}\right\} \subset \left\{\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0\right\} \bigcap \left\{\frac{S_n}{n(n+1)} \to 0\right\}.$$

Donc

$$\left\{\frac{S_n}{n} \text{ a une limite réelle}\right\} \subset \left\{\frac{X_n}{n} \to 0\right\} \subset (\limsup\{|X_n| \geq n\})^c.$$

En effet, si $X_n/n \to 0$, alors $|X_n| < n$ à partir d'un certain rang. L'évènement $(\limsup\{|X_n| \geq n\})^c$ étant de probabilité nulle, on en déduit que S_n/n diverge p.s. □

Exercice 18. **(Différents modes de convergence)** La convergence de l'exercice 5 a-t-elle lieu presque sûrement ? Dans $\mathbb{L}^1$?

Corrigé : Montrons que la convergence a lieu p.s. et dans $\mathbb{L}^1$. On pose

$$Z_n = \frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k$$

(1) Soit $\epsilon \in (0,1)$ et posons $A_n = \{Z_n \leq (1-\epsilon)\lambda^{-1}\}$. Montrons que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après les calculs de la solution de l'exercice 5, on a $\mathbb{P}(A_n) \leq e^{-n^{\epsilon\lambda}}$. Donc $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand on a $Z_n \geq 1-\epsilon$. Donc p.s. pour tout $k \geq 1$, $Z_n \geq 1-1/k$ pour tout n suffisamment grand.

Posons $B_n = \{Z_n \geq (1+\epsilon)\lambda^{-1}\}$.Les calculs de la solution de l'exercice 5 donnent

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)^n \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{n^{\epsilon\lambda}}.$$

La série de terme général $1/n^{\epsilon\lambda}$ ne converge pas, il faut donc ruser un peu comme dans l'exercice 10 de la PC 1. Fixons $\eta > 0$ et posons $n_k = (1+\eta)^k$. Alors $\sum_k P(B_{n_k})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $Z_{n_k} \leq (1+\epsilon)\lambda^{-1}$. On encadre ensuite $n \geq 1$: $(1+\eta)^k \leq n \leq (1+\eta)^{k+1}$ et on écrit :

$$Z_n = \frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\ldots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\ldots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n_{k+1})} \frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} = Z_{n_{k+1}} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Il s'ensuit que p.s. $Z_n \leq (1+2\epsilon)\lambda^{-1}$ pour tout n assez grand. Donc p.s. pour tout $k \geq 1$, $Z_n \leq \lambda + 1/k$ pour tout n suffisamment grand.

On conclut que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

(2) Pour la convergence dans $\mathbb{L}^1$, nous allons utiliser le lemme de Scheffé (exercice 14), qui nous garantit qu'il suffit de vérifier que $\mathbb{E}[Z_n] \to 1/\lambda$.

Montrons d'abord que

$$\int_0^1 \ln(1-v)v^{n-1}dv = -\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}. \tag{1}$$

Pour cela, on écrit $\ln(1-v) = -\sum_{k\geq 1} \frac{v^k}{k}$. Comme

$$\sum_{k\geq 1} \int_0^1 \frac{v^{k+n-1}}{k} dv = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+n)k} < \infty,$$

on a

$$\int_0^1 \ln(1-v)v^{n-1}dv = -\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+n)k}.$$

Pour calculer cette somme, remarquons que $\frac{1}{k(k+n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right)$, de sorte que

$$n\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+n)k} = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = \lim_{N\to\infty} H_N - H_{n+N} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

en notant $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ la série harmonique. Comme $H_n = \ln(n) + O(1)$ quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$n\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+n)k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

et (1) en découle.

Revenons maintenant au problème du comportement asymptotique de $\mathbb{E}[Z_n]$. Posons $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, de sorte que $Z_n = Y_n/\log(n)$, et déterminons une densité de Y_n. Pour $u \geq 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq u) = (1 - e^{-\lambda u})^n$. On en déduit que $\lambda n e^{-\lambda u}(1 - e^{-\lambda u})^{n-1}\mathbb{1}_{u\geq 0}$ est une densité de Y_n. Ainsi,

$$\mathbb{E}[Z_n] = \int_0^\infty \frac{\lambda n}{\ln(n)} u e^{-\lambda u}(1 - e^{-\lambda u})^{n-1} du = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\ln(n)} u e^{-\lambda \frac{u}{n}}(1 - e^{-\lambda \frac{u}{n}})^{n-1} du.$$

En faisant le changement de variable $v = 1 - e^{-\lambda u}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[Z_n] = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 \ln(1-v)v^{n-1} dv = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

compte tenu de (1). On en déduit que $\mathbb{E}[Z_n] \to 1/\lambda$ car $H_n \sim \log(n)$ lorsque $n \to \infty$, ce qui conclut.

Remarque. En utilisant la formule $\mathbb{E}[Y_n] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_n \geq t)dt$ vue à l'exercice 6 de la PC 1 (suivi du changement de variable $u = 1 - e^{-t}$), le calcul de $\mathbb{E}[Y_n]$ est un peu plus facile.

Remarque. Voici un argument probabiliste qui permet de montrer que $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$. Imaginons que nous disposons de n horloges et que X_k représente le temps auquel sonne la k-ième horloge. La variable aléatoire Y_n représente alors le temps au bout duquel sonne la dernière horloge. La première horloge sonne alors au temps $\min(X_1, \ldots, X_n)$, qui est distribué suivant une variable exponentielle de paramètre λn (d'espérance $\frac{1}{\lambda n}$ donc), et d'après la propriété d'absence de mémoire, en remettant le temps à 0, les temps au bout desquels sonnent les $n-1$ horloges restantes sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. On en déduit que $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{\lambda n} + \mathbb{E}[Y_{n-1}]$, et le résultat voulu en découle.

Pour rédiger ceci de manière formelle, notons $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ le réarrangement croissant des variables $(X_1, \ldots, X_n)$. On montre alors que la densité conditionnelle de $(X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(1)})$ sachant $X_{(1)}$ est la même que celle du réarrangement croissant de $n-1$ variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre λ (ce calcul est proche de celui des exercices 15 et 16 de la PC4). On écrit alors :

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\left[X_{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[X_{(n)} - X_{(1)}\right] + \mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_{(n)} - X_{(1)}|X_{(1)}]\right] + \frac{1}{\lambda n} = \mathbb{E}[Y_{n-1}] + \frac{1}{\lambda n}.$$

□