# X2016 – MAP 311
# PC 5 – Lundi 22 mai 2017 – Convergences de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

*Corrigé des exercices non traités sur* `http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311` *un peu après la PC.*

*Exercice 1.* (Petites questions)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers $X$. Montrer que $f(X_n)$ converge presque sûrement vers $f(X)$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers $X$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers $Y$ (toutes définies sur le même espace de probabilité). Montrer que $(X_n, Y_n)$ converge presque sûrement vers $(X, Y)$.

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables qui converge en moyenne vers une variable aléatoire réelle intégrable $X$. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.
*Indication.* On pourra utiliser le fait que $-|X_n - X| \leq X_n - X \leq |X_n - X|$.

## 1 Convergence presque sûre

*Exercice 2.* On suppose la chaleur dégagée par une réaction chimique est multipliée chaque seconde par une variable aléatoire $X \geq 0$ (indépendamment à chaque seconde). À quelle condition évite-t-on l'explosion ?

*Exercice 3.* On suppose que le temps d'attente $Z_n$ du RER B le $n$-ième jour suit une loi exponentielle de paramètre $1/n$ et que les variables aléatoires $(Z_n, n \geq 1)$ sont indépendentes. Que dire de $Z_n$ lorsque $n \to \infty$ ?

*Exercice 4.* On modélise l'évolution discrétisée d'une particule de pollen entre deux plaques absorbantes comme suit. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $k \geq 1$ un entier. On pose $S_0 = k$ et pour tout $n \geq 1$

$$S_n = k + X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $T = \inf\{i \geq 1 : S_i = 0 \text{ ou } S_i = 2k\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

(1) Montrer que $T < \infty$ presque sûrement.

(2) On pose $Z_n = S_{\min(n,T)}$. Montrer que $Z_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi. Est-ce que $Z_n$ converge en probabilité ? En moyenne ?

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

## 2 Convergence en probabilité

*Exercice 5.* On suppose que le temps d'attente du RER B suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Si on prend le RER B $n$ fois, comment se comporte le temps maximal d'attente lorsque $n \to \infty$ ? Pour modéliser cela, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on s'intéresse à la quantité $\max_{1 \leq k \leq n} X_k$.

Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

## 3 Convergence dans $\mathbb{L}^1$ (en moyenne)

*Exercice 6.* Soit $\alpha > 0$, et soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Est-ce que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité ? Est-ce que la suite $(Z_n)$ converge presque-sûrement ?

*Exercice 7.* Soit $X$ une variable aléatoire réelle intégrable. Montrer que $\mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{|X|>n}\right] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

## 4 À chercher pour la prochaine fois (lundi 30 mai)

*Exercice 8.* Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Trouver la limite presque sûre de

$$\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{X_k}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}$$

lorsque $n \to \infty$.

## 5 Plus appliqué (hors PC)

*Exercice 9.* (**Biais par la taille**) On considère une population comportant un grand nombre $n$ de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes de même loi sur $\mathbb{N}^*$, de moyenne $m = \mathbb{E}[X_1] = \sum_{k \geq 1} k p_k < \infty$ avec $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$. Soit $T$ la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(T = k)$ converge vers $\frac{k}{m} p_k$ lorsque $n \to \infty$.

*Exercice 10.* (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

(1) Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.

(2) En déduire que la convergence $\frac{T_n}{n \log n} \to 1$ a lieu en probabilité.
*Indication.* On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.

## 6 Pour aller plus loin (hors PC)

*Exercice 11.* Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout entier $n \geq 1$, $Z_n$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $n$. Montrer que $Z_n$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.

*Exercice 12.* (**Extension du théorème de convergence dominée**) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que $X_n$ converge en probabilité vers $X$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive et intégrable $Z$, indépendante de $n$, telle que $|X_n| \leq Z$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $X_n$ converge vers $X$ en moyenne.

*Indication.* On pourra utiliser que si $Y_n$ converge en probabilité vers $Y$ alors il existe une sous-suite de $Y_n$ qui converge presque sûrement vers $Y$.

*Exercice 13.* Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers $X$ et soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers $Y$. Montrer que $(X_n, Y_n)$ converge en probabilité vers $(X, Y)$.

*Exercice 14.* (**Lemme de Scheffé**) Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires **positives** qui convergent presque sûrement vers $X$. On suppose que $\mathbb{E}[X] < \infty$ et que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$. Le but de cet exercice est de démontrer que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$.

On pose $Y_n = \min(X_n, X)$ et $Z_n = \max(X_n, X)$.

(1) Démontrer que $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Démontrer que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.
*Indication.* On pourra écrire que $Z_n = X + X_n - Y_n$.

(3) Conclure que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
*Indication.* On pourra écrire que $|X_n - X| = Z_n - Y_n$.

*Exercice 15.* Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ telle que $X_n / c_n$ converge presque sûrement vers 0.

*Exercice 16.* Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi.

(1) Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.

(2) Montrer que pour tout $\alpha$ on a $\alpha \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}[X] < \alpha \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) + \alpha$.

*Indication. On pourra montrer que*

$$\sum_{n \geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n \geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)).$$

(3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

(4) En déduire la dichotomie suivante : presque sûrement,

$$\text{la plus grande valeur d'adhérence de } \frac{X_n}{n} \text{ vaut } \quad \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

*Exercice 17.* (Loi forte des grands nombres, cas non intégrable) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que si $X_1$ n'eſt pas intégrable alors la suite $(n^{-1} S_n)_{n \geq 1}$ diverge p.s.

*Indication.* On pourra utiliser la queſtion (3) de l'exercice 16 et montrer que si $S_n/n$ converge alors $X_n/n \to 0$.

*Exercice 18.* La convergence de l'exercice 5 a-t-elle lieu presque sûrement ? Dans $\mathbb{L}^1$ ?