X2016 – MAP 311 – PC 5

RAPPELS : Convergences de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Différents modes de convergence (chapitre 5 du poly)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (muni par exemple de la norme $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ si $X = (x_1, \ldots, x_n)$).

Convergence presque sûre. On dit X_n converge presque sûrement vers X si avec probabilité 1, X_n converge vers X lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}\left(X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X\right) = 1$, ou encore

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}\right) = 1,$$

ou encore

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tq } n \geq N \Longrightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon\}\right) = 1.$$

Attention. Le rang N dans l'évènement $\{\omega \in \Omega : \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tq } n \geq N \Rightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon\}$ dépend non seulement de ϵ mais aussi a priori de ω (c'est-à-dire qu'il est aléatoire).

Convergence en probabilité. On dit que X_n converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Convergence dans $\mathbb{L}^1$ (ou en moyenne). On dit que X_n converge en moyenne vers X si $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Attention. Si X_n converge en moyenne vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$, mais la réciproque est fausse en général.

2 Liens entre les différents modes de convergence

2.1 Implications

On a

$$\text{convergence p.s.} \quad \Longrightarrow \quad \text{convergence en probabilité}$$

et

$$\text{convergence en moyenne} \quad \Longrightarrow \quad \text{convergence en probabilité.}$$

2.2 Réciproques partielles pour remonter à la convergence en moyenne

Remonter de la convergence presque sûre à la convergence en moyenne. Avec le théorème de convergence dominée (Proposition 5.1.5 du poly) :

- si X_n converge presque sûrement vers X,
- s'il existe une variable aléatoire positive et intégrable Z, indépendante de n telle que $|X_n| \leq Z$,

alors X_n converge vers X en moyenne.

Remarque. Le théorème de convergence dominée reste vrai si X_n converge seulement en probabilité vers X (Exercice 13 de la PC 5).

Remonter de la convergence presque sûre à la convergence en moyenne. Avec le lemme de Scheffé pour des variables aléatoires réelles positives (Exercice 9 de la PC 5) :

- si X_n converge presque sûrement vers X,
- si $X_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$,
- si $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$,

alors X_n converge vers X en moyenne.

Remonter de la convergence en probabilité à la convergence en moyenne. Avec une hypothèse de bornitude sur les variables aléatoires (Proposition 5.1.7 du poly) :

- si X_n converge vers X en probabilité,
- si les variables aléatoires X_n sont **uniformément bornées** (il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_n| \leq a) = 1$ pour tout $n \geq 1$),

alors X_n converge vers X en moyenne.

Si les variables aléatoires ne sont pas bornées, le résultat suivant peut s'avérer pratique.

Remonter de la convergence en probabilité à la convergence en moyenne. Avec une hypothèse de bornitude sur les moments : on peut démontrer le résultat suivant.

- Si X_n converge vers X en probabilité,
- s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^{1+\epsilon}] < \infty$,

alors X_n converge vers X en moyenne.

(plus généralement, si X_n converge vers X en probabilité, alors X_n converge vers X en moyenne si et seulement si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est *uniformément intégrable*, c'est-à-dire si on a $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n|>A}\right] \to$ lorsque $A \to \infty$)

3 En pratique, comment montrer une convergence presque sûre ?

Parfois, il suffit d'appliquer le résultat général suivant, qui garantit une convergence presque sûre vers une variable aléatoire constante.

Loi forte des grands nombres. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 est intégrable. Alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1]$$

presque sûrement (Théorème 5.2.1 du poly).

En appliquant les lemmes de Borel-Cantelli. On montre souvent des convergences presque sûres à la main en utilisant les lemmes de Borel-Cantelli. Par exemple, si pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty,$$

alors X_n converge presque sûrement vers X.

En pratique, pour majorer des quantités de type $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$ (surtout lorsque X est une variable aléatoire constante), on utilise souvent l'inégalité de Markov (méthode du moment d'ordre 1), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (méthode du moment d'ordre 2), ou le fait que pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda|X_n - X|} \geq e^{\lambda\epsilon}\right) \leq e^{-\lambda\epsilon}\mathbb{E}\left[e^{\lambda|X_n - X|}\right]$ en choisissant convenablement λ (méthode de Chernoff ou des grandes déviations).

Par composition. Si $X_n \to X$ presque sûrement et si f est continue, alors $f(X_n) \to f(X)$ presque sûrement (Proposition 5.1.10 du poly).

Par convergence jointe. Si $X_n \to X$ presque sûrement et si $Y_n \to Y$ presque sûrement, alors $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ presque sûrement (voir exercice 1 de la PC 5).

En extrayant des sous-suites. Si $X_n \to X$ en probabilité, alors il existe une sous-suite de (X_n) qui converge presque sûrement vers X (Proposition 5.1.8 du poly).

Pour montrer que des évènements sont presque sûrs ou négligeables, on utilise souvent le petit résultat suivant. Soient A et B deux événements tels que $A \subset B$.

- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors $\mathbb{P}(B) = 1$.
- Si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

4 En pratique, comment montrer une convergence en probabilité ?

Par composition. Si $X_n \to X$ en probabilité et si f est continue, alors $f(X_n) \to f(X)$ en probabilité (Proposition 5.1.8 du poly).

Par convergence jointe. Si $X_n \to X$ en probabilité et si $Y_n \to Y$ en probabilité , alors $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en probabilité (voir l'exercice 14 de la PC 5).

Montrer une convergence plus forte. On peut montrer que $X_n \to X$ en moyenne ou dans $\mathbb{L}^2$ (ce qu'on fait souvent avec l'inégalité de Markove, dite technique du premier moment, ou de Bienaymé-Tchebychev, dites technique du second moment, voir par exemple PC 5, exercice 11).

En utilisant le lemme des sous-sous suites. On peut démontrer que X_n converge en probabilité vers X si et seulement de toute sous-suite de (X_n) on peut extraire une sous-sous suite qui convergence presque sûrement vers X (c'est-à-dire si pour toute application strictement croissante $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ il existe une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge presque sûrement vers X).

5 En pratique, comment montrer une convergence en moyenne ?

Parfois, il suffit d'appliquer le résultat général suivant, qui garantit une convergence en moyenne vers une variable aléatoire constante.

Loi forte des grands nombres. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 est intégrable. Alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[X_1]$$

en moyenne (Théorème 5.2.2 du poly).

Remonter vers la convergence en moyenne. On peut montrer d'abord que X_n converge presque sûrement ou en probabilité vers X, puis remonter vers la convergence en moyenne en utilisant les techniques énoncées précédemment.