X2016 – MAP 311
PC 9 – 26 juin 2017 – Tests

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311 *un peu après la PC.*

1 Tests

Exercice 1. Sur un échantillon représentatif de 1000 personnes, on rapporte les avis favorables pour une femme politique. En novembre, il y avait 38% d'avis favorables, et 36% en décembre. Une éditorialiste dans son journal prend très au sérieux cette chute de 2 points. Le but de cet exercice est de confirmer ou d'infirmer la position de la journaliste.

On note p la proportion d'avis favorables en novembre, et q cette proportion en décembre, et on se propose de test $H_0 : p - q = 0$ contre $H_1 : p - q \neq 0$ au niveau 5%. On note $\widehat{p_n}$ la proportion d'avis favorables dans un échantillon représentatif de n personnes en novembre (et de même $\widehat{q_n}$ pour décembre).

(1) Démontrer que $\sqrt{n}(\widehat{p_n}-p, \widehat{q_n}-q)$ converge en loi vers un vecteur gaussien dont on précisera la matrice de covariance. En déduire que

$$\sqrt{n}(\widehat{p_n} - \widehat{q_n}) - \sqrt{n}(p-q) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad \mathcal{N}(0, p(1-p) + q(1-q)).$$

(2) Étudier le comportement de

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{p_n} - \widehat{q_n})}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n}) + \widehat{q_n}(1-\widehat{q_n})}}$$

lorsque $n \to \infty$.

(3) Construire un test de niveau asymptotique 5% de H_0 contre H_1 en se servant de T_n. Faire l'application numérique.

Exercice 2. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $1/\theta > 0$ avec θ inconnu. Soit $\theta_0 > 0$ et $\alpha \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

On souhaite tester $H_0 = \{\theta = \theta_0\}$ contre $H_1 = \{\theta > \theta_0\}$ au niveau α.

(1) Rappeler pourquoi S_n suit une loi Γ dont on identifiera les paramètres.

(2) Démontrer que sous H_0,

$$Z_n = \frac{2S_n}{\theta_0}$$

suit une loi du χ^2 à un nombre de de degrés de liberté d_n qu'on précisera.

On rappelle qu'une loi du χ^2 à d degrés de liberté est la loi de la somme des carrés de d gaussiennes centrées réduites indépendantes, et qu'une densité de cette loi est

$$\frac{1}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma(d/2)} t^{\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \mathbb{1}_{t\geq 0}.$$

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a,\lambda)$ est $\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$.

(3) En déduire une région de rejet de la forme

$$W_n = \{S_n \geq c\}$$

avec c une constante qu'on exprimera en fonction de θ_0 et $z_{1-\alpha}$, le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à d_n degrés de liberté.

(4) On suppose que θ est le temps moyen d'attente du RER B à la gare de Lozère. Une association d'usagers et la RATP souhaitent tester si le RER B respecte un temps d'attente moyen réglementaire d'au plus $\theta_0 = 15\,\text{min}$. Teste-t-on

$$H_0 = \{\theta \leq \theta_0\} \text{ contre } H_1 = \{\theta > \theta_0\} \qquad \text{ou} \qquad H_0 = \{\theta \geq \theta_0\} \text{ contre } H_1 = \{\theta < \theta_0\} ?$$

2 Estimateurs du maximum de vraisemblance

Exercice 3. La hauteur maximale en mètres de la crue annuelle d'un fleuve est modélisée par une variable aléatoire de Rayleigh de paramètre a qui a pour densité :

$$f(x) = \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

où a est un paramètre inconnu.

(1) Déterminer l'esimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{a_n}$ de a.

(2) Si X suit une loi de Rayleigh de paramètre a, démontrer que X^2 suit une loi exponentielle de paramètre $1/(2a)$.

(3) L'estimateur $\widehat{a_n}$ est-il sans biais ?

(4) Trouver un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau 95%.
On rappelle que la variance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $1/\lambda^2$.

(5) Une compagnie d'assurance estime qu'une catastrophe correspond à une crue de plus de 6m. Trouver un intervalle de confiance asymptotique pour la probabilité p qu'une catastrophe se produise durant une année au niveau 95%.

3 Plus appliqué

Exercice 4. On considère les décimales du nombre π est on souhaite savoir si elles sont uniformément réparties sur $\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}$. On calcule π à 10^{-n} près avec $n = 10000$, ce qui nous donne les n premières décimales de π. On trouve $N_0 = 968$, $N_1 = 1026$, $N_2 = 1021$, $N_3 = 975$, $N_4 = 1012$, $N_5 = 1046$, $N_6 = 1021$, $N_7 = 969$, $N_8 = 948$ et $N_9 = 1014$.

Tester l'hypothèse que les décimales de π sont uniformément réparties au niveau 5%.

4 Quelques exercices pour finir...

Exercice 5. Démontrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés indépendants de façon à ce que la somme des points obtenus en les lançant indépendamment suive la loi uniforme sur l'ensemble $\{2,3,4,\dots,12\}$.

Indication. On pourra noter U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1,2,\dots,6\}$, supposer que $S = U+V$ suit la loi uniforme sur $\{2,3,\dots,12\}$ et exploiter le fait que $\mathbb{E}\left[x^S\right] = \mathbb{E}\left[x^U\right] \cdot \mathbb{E}\left[x^V\right]$.

Exercice 6. Selon Shakespeare, César dit à Brutus au moment de mourir : “Et tu, Brute ? Then fall, Cæsar !”. Estimez la probabilité que vous inhaliez à cet instant l'une des molécules d'air exhalées par César prononçant cette ultime phrase.

On supposera qu'il y a 10^{44} molécules d'air en tout, qu'il y a environ $6 \cdot 10^{23}$ molécules d'air dans 22.5 litres d'air et qu'une inhalation ou une exhalation représentent 0.5 litres d'air.