CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

DS final – Lundi 2 mai – Durée : 2h

Éléments de correction

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

On supposera que toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité.

Exercice 1. (Preuves de cours)

(1) Énoncer et démontrer le premier lemme de Borel–Cantelli.

(2) Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Corrigé. Cf cours.

Exercice 2. Soit $c > 0$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tous entiers $i, j \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = c\frac{i+j}{i!j!}.$$

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = c \cdot e \cdot \frac{k+1}{k!}.$$

Corrigé. On a (formule des probabilités totales avec les événements $\{Y = j\}$ pour $j \geq 0$) :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(X = k, Y = j) = c \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j-1)!k!} + c \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(k-1)!j!}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = ce\left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!}\right) = ce\frac{k+1}{k!},$$

ce qui est aussi égal à $\mathbb{P}(Y = k)$ par symétrie.

(2) Montrer que $c = \frac{1}{2e^2}$.

Corrigé. On doit avoir

$$1 = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X = k) = ce \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \right) = 2ce^2,$$

d'où le résultat.

(3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Corrigé. Comme X est positive, on peut écrire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(X = k) = ce \left(\sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k-1)!} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k-1)!} \right).$$

Pour calculer cette somme, on décompose $\frac{k}{(k-1)!} = \frac{k-1}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!}$, et on trouve

$$\mathbb{E}[X] = 3ce^2 = \frac{3}{2},$$

ce qui montre aussi que X admet une espérance.

(4) Calculer $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Corrigé. Pour calculer $\mathbb{E}[XY]$, on utilise la formule de transfert pour une variable aléatoire positive (appliqué ici avec $f(X,Y)$ avec $f(x,y) = xy$) :

$$\mathbb{E}[XY] = c \sum_{i,j\geq 0} ij \frac{i+j}{i!j!} = 4ce^2 = 2.$$

Ainsi, $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 2 - 9/4 = -1/4$.

(5) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé. Non, car sinon on aurait $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ (on peut aussi voir que $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$).

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $c > 0$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Corrigé. En utilisant la formule des probabilités totales avec les événements $\{Y = j\}$ $(j \geq 0)$, on trouve

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(X > Y, Y = j) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(X > j, Y = j) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(X > j)\mathbb{P}(Y = j)$$

par indépendance de X et Y pour la dernière égalité. Donc

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{j\geq 0} e^{-cj} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{(\lambda e^{-c})^j}{j!} = e^{\lambda e^{-c} - \lambda}.$$

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = \max(X, Y)$.

(1) Déterminer la loi de Z et montrer que Z est une variable aléatoire réelle à densité.

Corrigé. Pour $x \leq 0$, on a $\mathbb{P}(Z \leq x) = 0$. Pour $x > 0$, on a

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq x) = (1 - e^{-x})^2$$

par indépendance de X et Y. Ainsi, F_Z est bien continue, C^1 sauf éventuellement en 0, donc Z est à densité.

(2) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Corrigé. Une densité de Z est donnée par une dérivée de F_Z aux points où F_Z est dérivable, donc

$$f_Z(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})\mathbb{1}_{x\geq 0}$$

est une densité de Z. Z admet une espérance si et seulement si

$$\int_0^\infty x f_Z(x)dx < \infty,$$

ce qui est le cas, et donc

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty 2x(e^{-x} - e^{-2x})dx = 2(1 - 1/4) = \frac{3}{2}.$$

Exercice 5.

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité qui admettent une espérance telles que $\mathbb{E}[|X_n|] \to 0$ quand $n \to 0$. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Corrigé. D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) On suppose que Y_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ et que $\sigma_n^2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montre que Y_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Corrigé. D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = \mathbb{P}\left(Y_n^2 > \epsilon^2\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] = \frac{\sigma_n^2}{\epsilon^2} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Problème. Le but de ce problème est d'étudier un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

- Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.
- À l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.
- Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

On note T_n le premier temps où un individu occupe le site n.

Partie I. Étude de quelques propriétés de T_n.

(1) Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, où les variables aléatoires $E_1, \ldots, E_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

Corrigé. T_n représente le premier temps où un individu occupe le site n : pour passer de T_n à T_{n+1} on ajoute bien une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 indépendante de tout le reste.

(2) La variable aléatoire T_n admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Corrigé. T_n admet une espérance et une variance comme somme de variables aléatoires admettant un espérance et une variance. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left[T_n\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[E_i\right] = n$$

car l'espérance d'une variance aléatoire exponentielle de paramètre 1 vaut 1. Comme $E_1, \ldots, E_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathsf{Var}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(E_i) = n$$

car la variance d'une variance aléatoire exponentielle de paramètre 1 vaut 1.

(3) Montrer que T_n/n converge presque sûrement vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Corrigé. C'est une conséquence de la loi forte des grands nombres (les variables aléatoire $E_1, \ldots, E_n$ sont indépendantes, de même loi et admettent une espérance qui vaut 1).

Partie II. Quelques propriétés utiles pour la suite.

(4) Soit E une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire e^{xE} admet-elle une espérance ? Calculer $\mathbb{E}\left[e^{xE}\right]$ lorsque e^{xE} admet une espérance.

Corrigé. D'après la formule de transfert, e^{xE} admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{xu}e^{-u}du$$

converge, c'est-à-dire si et seulement si $x < 1$. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{xE}\right] = \int_0^\infty e^{xu}e^{-u}du = \frac{1}{1-x}.$$

(5) Calculer $\mathbb{E}\left[e^{xT_n}\right]$ lorsque e^{xE} admet une espérance.

Corrigé. Pour $x < 1$, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{xT_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{xE_1} \cdots e^{xE_n}\right].$$

Or les variables aléatoires $e^{xE_1}, \ldots, e^{xE_n}$ sont indépendantes (lemme de composition). Donc

$$\mathbb{E}\left[e^{xT_n}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{xE_i}\right] = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

(6) Lorsque $n \to \infty$, montrer que

$$e^{-\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\right)^n$$

converge vers un nombre réel strictement positif qu'on determinera.

Corrigé. On a

$$e^{-\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\sqrt{n}+n\ln(1-1/\sqrt{n})} = e^{-\sqrt{n}-n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{1/2}.$$

Partie III. Soit $a > 0$. Le but de cette partie est d'étudier le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a)$ lorsque $n \to \infty$.

(7) Dans cette question, on suppose que $a > 1/2$.

(a) Montrer que

$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}} \right)^n .$$

Corrigé. On écrit

$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) = \mathbb{P}\left(e^{\frac{T_n}{\sqrt{n}}} \geq e^{\sqrt{n} + n^{a-1/2}} \right),$$

et le résultat s'obtient en utilisant l'inégalité de Markov avec la question (5).

(b) Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a)$ converge.

Corrigé. D'après les questions (7a) et (6), il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq c e^{-n^{a-1/2}}.$$

Comme $a > 1/2$, cette série converge.

(c) Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.

Corrigé. Ceci découle du premier lemme de Borel–Cantelli.

(8) Déterminer la limite de $\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^{1/2}\right)$ lorsque $n \to \infty$ (on pourra exprimer la réponse sous la forme d'une intégrale).

Corrigé. On écrit

$$\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^{1/2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{E_1 + \cdots + E_n - n}{\sqrt{n}} \geq 1 \right).$$

Comme la variance de E_1 vaut 1, d'après le théorème Central Limite ceci converge vers $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1)$, donc

$$\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^{1/2}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty e^{-x^2/2} dx.$$

(9) On suppose que $a < 1/2$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a)$ lorsque $n \to \infty$.

On montre que la limite vaut $1/2$. Comme à la question (8), pour tout $\beta \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(T_n \geq n + \beta\sqrt{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\beta^\infty e^{-x^2/2} dx.$$

En particulier, $\mathbb{P}(T_n \geq n) \to 1/2$ lorsque $n \to \infty$. Or $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq \mathbb{P}(T_n \geq n)$ pour tout $n \geq 1$ (car $\{T_n \geq n + n^a\} \subset \{T_n \geq n\}$), donc $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a)$ est déjà majorée par une suite qui converge vers $1/2$ lorsque $n \to \infty$.

Fixons $\epsilon > 0$ et montrons que pour n assez grand on a $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \geq 1/2 - \epsilon$. Soit $\beta > 0$ suffisamment petit tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\beta^\infty e^{-x^2/2} dx \geq 1/2 - \epsilon/2.$$

Donc, pour n assez grand, on a $\mathbb{P}(T_n \geq n + \beta\sqrt{n}) \geq 1/2 - \epsilon$. Or pour n assez grand on a $\beta\sqrt{n} \geq n^a$ car $a < 1/2$. Donc pour n assez grand on a $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \geq \mathbb{P}(T_n \geq n + \beta\sqrt{n}) \geq 1/2 - \epsilon$, ce qui conclut.