CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Feuille d'exercices 1 : espaces probabilisés

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. On modélise un lancer indéfini d'une pièce équilibrée comme suit. On pose $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$ on interprète ω_k comme le résultat du k-ième lancer. Pour tout $k \geq 1$ et $u_1, \dots, u_k \in \{0,1\}$ on définit l'ensemble

$$C_{u_1,u_2,\dots,u_k} = \{(\omega_n)_{n\geq 1} : \omega_1 = u_1, \dots, \omega_k = u_k\}. \tag{1}$$

Exprimer (par des unions, intersections et complémentaires) les évènements suivants en fonction d'ensembles de type (1) :

(1) A : « le résultat du second lancer est pile »

(2) B_n : « on obtient pile pour la première fois au n-ième lancer »

(3) C : « on n'obtient jamais pile »

(4) D_n : « on obtient pile au moins deux fois au cours des n premiers lancers »

On admet l'existence d'une plus petite tribu $\mathcal{A}$ contenant tous ces ensembles et l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que

$$\mathbb{P}\left(C_{u_1,u_2,\dots,u_k}\right) = \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

(5) Calculer les probabilités des événements A, B_n, C, D_n précédents.

Remarque : On peut prouver que Ω n'est pas dénombrable, et qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que (2) soit vérifiée pour tous les ensembles de type (1).

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On suppose que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $\mathbb{P}(B) = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(B|A) = 0$.

Exercice 3. Vrai ou faux ? Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Dire si chaque affirmation est vraie (alors la prouver) ou fausse (donner un contre-exemple) :

(1) Si $A, B \subset \Omega$ alors $\{\emptyset, A, B, \overline{A}, \overline{B}\}$ est une tribu sur Ω.

(2) Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ alors $B = \overline{A}$.

(3) Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(4) Si A et B sont deux évènements tels que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ alors A et B sont incompatibles.

(5) Si $(A_k)_{k\geq 1}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles alors pour tout évènement A la série $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(A|A_k)$ est convergente.

Exercice 4. On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

Exercice 5. On dispose de quatre livres, un livre de mathématiques, un livre de biologie, un livre de chimie, et un livre mathématiques-biologie-chimie. On choisit au hasard, avec la probabilité uniforme, un livre parmi les quatre. Notons M, B et C les événements ≪ le livre choisi traite notamment de mathématiques ≫ (respectivement biologie, chimie). Montrer que les événements M, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils indépendants ?

Exercice 6. Chaque nuit, le prince choisit au hasard de dormir sur $6, 7$ ou bien 8 matelas (avec des probabilités égales). Chaque nuit, indépendamment, la princesse place sous les matelas un petit pois avec probabilité $1/2$. Par ailleurs :

- si le prince dort sur 6 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort mal ;
- si le prince dort sur 7 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort bien avec probabilité $1/5$ (sinon il dort mal) ;
- si le prince dort sur 8 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort bien avec probabilité $2/5$ (sinon il dort mal).

(s'il n'y a pas de petit pois, le prince dort toujours bien).

(1) Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints, et telle que leur union soit égale à l'univers. Montrer que tout événement A vérifie

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A \middle| B_i\right) \mathbb{P}(B_i).$$

(2) Quelle est la probabilité que le prince annonce avoir bien dormi au réveil ?

(3) Si A et B sont deux événements de probabilité non nulles, montrer que

$$\mathbb{P}\left(A \middle| B\right) = \mathbb{P}\left(B \middle| A\right) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(4) Sachant que le prince a bien dormi, quelle est la probabilité qu'il ait dormi sur 7 matelas ?

(5) Le matin du 1er février, le prince annonce avoir bien dormi. Sur combien de matelas a-t-il dormi, en moyenne ?