CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016
Feuille d'exercices 3 : Espérances

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$ de loi uniforme. On pose $f(x)=0$ si x est impair et $f(x)=x$ sinon. Montrer que $f(X)$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 2. Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1,2,\ldots,n,\ldots$. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres, et que la probabilité que le sauteur réussit son n-ième saut vaut $1/n$. Celui-ci s'arrête une fois qu'il a échoué un saut. Soit X le numéro du dernier saut réussi. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance ainsi que $\mathbb{E}\left[X^2\right]$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=1/2$. Pour $n\geq 1$, on note $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

(i) Montrer que S_n admet une espérance et la calculer.

(ii) Soit $\lambda>0$. Montrer que $e^{\lambda S_n}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 4. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$ (on rappelle qu'une permutation de $\mathcal{S}_n$ est une bijection de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{1,2,\ldots,n\}$). Si $\sigma\in\mathcal{S}_n$, on dit que $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ est un point fixe de σ si $\sigma(i)=i$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}_n$ et de loi uniforme. On note $N(X)$ le nombre de points fixes de X. Le but de cet exercice est de calculer $\mathbb{E}\left[N(X)\right]$.

(i) Soit $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Combien y a-t-il de permutations de $\mathcal{S}_n$ pour lesquelles i est un point fixe ? En déduire la valeur de la probabilité que i soit un point fixe de X.

(ii) Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{A}$ un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par

$$\begin{array}{rcccc} \mathbb{1}_A & : & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega\in A \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{array}$$

Montrer que $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli d'un paramètre qu'on identifiera.

(iii) Montrer que $N(X)$ admet une espérance. En remarquant que

$$N(X)=\mathbb{1}_{1\text{ est un point fixe de }X}+\mathbb{1}_{2\text{ est un point fixe de }X}+\cdots+\mathbb{1}_{n\text{ est un point fixe de }X},$$

en déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[N(X)\right]$.

Exercice 5. Le nombre N de voitures passant devant une station d'essence suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. Chaque voiture décide de s'arrêter à la station avec probabilité $p\in(0,1)$ indépendamment des autres. On note K le nombre de voitures qui s'arrêtent à la station. Trouver $\mathbb{E}\left[K\right]$.