CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Feuille d'exercices 5 : Espérances de variables aléatoires réelles à densité

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que U et $1 - U$ ont la même loi. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U]$ de manière simple.

Exercice 2. Un point M est choisi au hasard dans un disque de centre O et de rayon r. La probabilité que M appartienne à une portion du disque est proportionnelle à l'aire de cette portion. On note X la variable aléatoire égale à la longueur OM. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 3. (à connaître) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et soit $\lambda > 0$. En utilisant la méthode de la fonction muette, trouver la loi de $\lambda \cdot X$.

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0, \theta]$. On pose

$$T = 2 \cdot \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{n}, \qquad S = \frac{n+1}{n} \cdot \max(U_1, \ldots, U_n).$$

(i) Calculer l'espérance et la variance de T.

(ii) Calculer l'espérance et la variance de S.

Exercice 5. (à connaître) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Trouver la loi de $\sigma X + m$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On note $\mathrm{Y} = X^2/2$. Déterminer la fonction de répartition de Y, donner une densité de Y et calculer l'espérance de Y.