CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Remarques sur le DM

Remarques générales.

- Ne pas écrire des variables non définies (par exemple $\mathbb{P}(Y \leq x)$ sans préciser à quel ensemble appartient x).
- Lorsqu'on utilise la linéarité de l'espérance ou le théorème de transfert, il faut le mentionner et le justifier. Par exemple en écrivant *(linéarité de l'espérance pour des v.a. positives)* ou *(linéarité de l'espérance pour des v.a. admettant une espérance)*, *(théorème de transfert pour une fonction positive)* ou encore *(théorème de transfert pour $g(X)$ avec $g(X)$ qui admet une espérance)*.
- Si $X, Y \geq 0$ sont des variables aléatoires réelles positives, on ne peut pas écrire en général que
$$\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$$
en invoquant la linéarité pour les v.a. positives. En effet, pour écrire que $\mathbb{E}[X + (-Y)] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[-Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ on utilise le cas général, et il faut justifier que X et $-Y$ admettent une espérance.
- Attention, la linéarite de l'espérance ne signifie PAS que $\mathbb{E}[|X + Y|] = |\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]|$. Il est en revanche vrai que
$$\mathbb{E}[|X + Y|] \leq \mathbb{E}[|X| + |Y|] \leq \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|]$$
(croissance et linéarité de l'espérance pour des v.a. positives).
- On évite de parler de la linéarité de la variance, car en général il n'est pas vrai que $Var(\lambda X) = \lambda \cdot Var(X)$.

Éléments de correction.

Exercice 2, question 2. Il ne fallait pas oublier de distinguer le cas où $x \leq 0$ dans le calcul de $\mathbb{P}(X^2 \leq x)$, qui donnait alors 0.

Exercice 4. Il y a eu beaucoup d'erreurs sur la dérivée de $\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$. Le plus simple est d'écrire
$$\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n,$$
dont la dérivée est $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n nx^{n-1}$.

Problème 1, question 3. On raisonne par l'absurde, et on suppose que pour tout $\omega \in \Omega$ on a $X(\omega) < \mathbb{E}[X]$. Alors pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $x < \mathbb{E}[X]$. La variable aléatoire $\mathbb{E}[X] - X$ est donc positive. Comme X admet une espérance, par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}[X] - X$ est d'espérance nulle. D'après le cours, on a donc $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X] = X) = 1$. L'événement $\{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X] = X(\omega)\}$ est donc non vide (sinon il aurait une probabilité nulle), et il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que $\mathbb{E}[X] = X(\omega)$, absurde.

Problème 2, question 6. L'idée était d'écrire

$$\mathbb{P}\left(|\frac{T_N^{(N)}}{N\log(N)} - 1| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left|\frac{T_N^{(N)}}{N\log(N)} - 1\right|^2\right],$$

puis

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{T_N^{(N)}}{N\log(N)} - 1\right)^2\right] = \frac{1}{N^2\log(N)^2}\mathbb{E}\left[(T_N^{(N)})^2\right] - \frac{2}{N\log(N)}\mathbb{E}\left[T_N^{(N)}\right] + 1.$$

On sait que $\mathbb{E}\left[T_N^{(N)}\right]/(N\log(N)) \to 1$. Pour contrôler $\mathbb{E}\left[(T_N^{(N)})^2\right]$, on écrit

$$\mathbb{E}\left[(T_N^{(N)})^2\right] = Var(T_N^{(N)}) + \mathbb{E}\left[T_N^{(N)}\right]^2,$$

de sorte que

$$\frac{1}{N^2\log(N)^2}\mathbb{E}\left[(T_N^{(N)})^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{T_N^{(N)}}{N\log(N)} - 1\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 2 + 1 = 0.$$

Problème 2, question 7. On a $\mathbb{P}(A_{i,m}) = \mathbb{P}(X_1 \neq i, \ldots, X_m \neq i) = \mathbb{P}(X_1 \neq i) \cdots \mathbb{P}(X_m \neq i) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^m$.

Problème 2, question 8. Pour résoudre cette question, on pouvait partir du fait que si $k \geq 1$ est un entier, alors

$$\{T_N^{(N)} \geq k\} = \bigcup_{i=1}^{N} A_{i,k-1}.$$

En effet, $T_N^{(N)} \geq k$ si et seulement si il existe une carte qu'on n'a pas encore au bout de $k-1$ cartes achetées. On écrit alors

$$\mathbb{P}\left(T_N^{(N)} \geq k\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_{i,k-1}) = N\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \leq Ne^{-(k-1)/N} \tag{1}$$

en utilisant l'inégalité $(1-y)^m \leq e^{-ym}$ pour $y \in [0,1]$ et $m \geq 0$.

N.B. Écrite telle quelle, la question 8 n'est pas correcte. Une version correcte serait : *En supposant que* $\log(N)N + xN$ *est entier, montrer que*

$$\mathbb{P}\left(T_N^{(N)} > \log(N)N + xN\right) \le e^{-x}.$$

(avec une inégalité stricte dans la probabilité). On peut cependant montrer qu'on a toujours

$$\mathbb{P}\left(T_N^{(N)} \ge \log(N)N + xN\right) \le e^{-x+2/N}.$$

Ces inégalités se prouvent en utilisant (1).

Problème 3. Il fallait justifier que les X_i admettaient une espérance. Ceci provient du fait que si X admet un moment d'ordre 2 fini, alors X admet un moment d'ordre 1 fini (et donc admet une espérance).

Problème 3, question 3. Dire que l'événement A_k est réalisé c'est dire que le plus petit j tel que $|S_j| \ge t$ est k, ce qui rend la question 3 intuitivement vraie. Pour le rédiger, on peut procéder comme suit.

Si $k < \ell$ et $\omega \in A_k \cap A_\ell$, alors $|S_k| \ge t$ car $\omega \in A_k$ et $|S_k| < t$ car $\omega \in A_\ell$, absurde. Donc $A_k \cap A_\ell = \emptyset$.

Pour montrer que $A = \cup_{i=1}^n A_i$, on raisonne par double inclusion. Si $\omega \in \cup_{i=1}^n A_i$, soit i tel que $\omega \in A_i$. Alors $|S_i| \ge t$ et donc $\omega \in A$. Réciproquement, si $\omega \in A$, il existe un plus petit entier k tel que $|S_k| \ge t$. On a alors $\omega \in A_k$ et donc $\omega \in \cup_{i=1}^n A_i$.

Problème 3, question 4. On remarque que $S_k^2 \mathbb{1}_{A_k} \ge t^1 \mathbb{1}_{A_k}$. En effet, si $\omega \notin A_k$, les deux termes sont nuls. Sinon, si $\omega \in A_k$, cela implique que $|S_k| \ge t^2$ et donc $S_k^2 \mathbb{1}_{A_k} \ge t^2 \mathbb{1}_{A_k}$.

Le résultat demandé en découle en utilisant la croissance et la linéarité de l'espérance pour des variables aléatoires positives.

Problème 3, question 6. Pour justifier proprement que les variables aléatoires $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ et $S_n - S_k$ étaient indépendantes, on pouvait raisonner comme suit.

D'après le principe des coalitions, les vecteurs $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendants. Or $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ ne dépend que de $(X_1, \ldots, X_k)$, et $S_n - S_k$ ne dépend que de $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$. Donc d'après le principe de composition, $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ et $S_n - S_k$ sont indépendantes.

Attention : il n'est pas vrai que $\mathbb{1}_{A_k}$ ne dépend que de S_k.