CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Variables aléatoires (presque) constantes

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire.

Variable aléatoire constante. La variable aléatoire X est dite constante s'il existe $a \in E$ tel que $X(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Variable aléatoire constante avec probabilité 1. On suppose que $\{a\} \in \mathcal{E}$ pour tout $a \in E$. Quel sens donner à l'affirmation « la variable aléatoire X est constante avec probabilité 1 » ?

(A) Première possibilité : il existe $a \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$, ou, autrement dit, il existe $a \in E$ tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}) = 1.$$

(B) Deuxième possibilité : $\mathbb{P}$ (il existe $a \in E$ tel que $X = a$), qu'on interprète comme

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega) = a(\omega)\}) = 1.$$

(C) Troisième possibilité : $\mathbb{P}$ (il existe $a \in E$ tel que $X = a$), mais qu'on interprète comme

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega') = a(\omega) \text{ pour tout } \omega' \in \Omega\}) = 1.$$

Tout d'abord on remarque que la deuxième possibilité n'est pas très intéressante, car

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega) = a(\omega)\}) = 1$$

est toujours vrai (si $\omega \in \Omega$, il existe bien $a(\omega) \in E$ tel que $X(\omega) = a(\omega)$: il suffit de prendre $a(\omega) = X(\omega)$).

Vérifions maintenant que la troisième possibilité signifie en fait que la variable aléatoire X est constante. Supposons que

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega') = a(\omega) \text{ pour tout } \omega' \in \Omega\}) = 1.$$

L'événement $\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega') = a(\omega) \text{ pour tout } \omega' \in \Omega\}$ est donc non vide (car de probabilité non nulle), choisissons un élément ω_0 dedans. Alors il existe $a(\omega_0)$ tel que $X(\omega') = a(\omega_0)$ pour tout $\omega' \in \Omega$. On a donc

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a(\omega_0)\} = \Omega.$$

La variable aléatoire X est donc constante (et vaut $a(\omega_0)$).

Remarque. Le raisonnement précédent montre en fait que si

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega') = a(\omega) \text{ pour tout } \omega' \in \Omega\}\right) > 0,$$

alors

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \text{il existe } a(\omega) \in E \text{ tel que } X(\omega') = a(\omega) \text{ pour tout } \omega' \in \Omega\}\right) = 1.$$

Ainsi, la « bonne » définition de « Variable aléatoire constante avec probabilité 1 » est la première possibilité.

Attention, comme vu en cours, une variable aléatoire constante avec probabilité 1 n'est pas forcément constante. Par exemple, prenons $\Omega = \{2, 3\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ tel que $\mathbb{P}(\{2\}) = 1$, $\mathbb{P}(\{3\}) = 0$, et soit X la variable aléatoire telle que $X(2) = 17$ et $X(3) = 31$. Alors X n'est pas constante, mais $\mathbb{P}(X = 17) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 17\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = 1$, donc X est constante avec probabilité 1.

Revenons à l'exercice commencé en cours. Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que X est indépendante de X. Montrons que X est constante avec probabilité 1, c'est-à-dire qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $a \in E$, $\mathbb{P}(X = a) < 1$. Il existe donc une valeur $a_0 \in E$ telle que $0 < \mathbb{P}(X = a_0) < 1$. Mais alors $0 < \mathbb{P}(X \neq a_0) < 1$, et il existe donc une autre valeur $a_1 \in E$ (avec $a_1 \neq a_0$) telle que $0 < \mathbb{P}(X = a_1)$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\mathbb{P}(X = a_1) = 0$ pour tout $a_1 \neq a_0$, ce qui impliquerait $\mathbb{P}(X \neq a_0) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X = a_0) = 1$, absurde. Comme X est indépendante de X, on a alors

$$\mathbb{P}(X = a_0, X = a_1) = \mathbb{P}(X = a_0) \cdot \mathbb{P}(X = a_1).$$

Or $a_0 \neq a_1$, donc le terme de gauche est nul, alors que celui de droite ne l'est pas, absurde.