TD 10 — Lois de variables aléatoires – Corrigé

Notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une fonction $X : \Omega \to E$ qui est $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurable est appelée **variable aléatoire**, (sous entendu $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ mesurable), abrégé en v. a. On parle de variable aléatoire réelle lorsque $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'**espérance** de X est par définition son intégrale par rapport à $\mathbb{P}$, et on la note $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Par définition, la **loi** de X, notée $\mathbb{P}_X$, est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, autrement dit

$$\forall C \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_X(C) = \mathbb{P}(X \in C).$$

En particulier, d'après le théorème de transfert, pour toute fonction $f : E \to [0, \infty]$ qui est $\mathcal{E}$-mesurable,

$$\int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[f(X)] = \int_E f(u)\, d\mathbb{P}_X(u)\,.$$

Une variable aléatoire réelle est dite gaussienne centrée réduite si sa densité est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, et une variable aléatoire réelle est dite exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1 – Calculs de lois

Exercice 1. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\, dx\, dy.$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(y)\, dx\, dy.$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. On suppose que la loi de (X,Y) est
$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$
Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Corrigé :

1. Soit $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F(U)) &= \lambda\mu\int_{\mathbb{R}_+^2}F(\min(x,y))e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\mu\int_{\{0\le x\le y\}}F(x)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy+\lambda\mu\int_{\{0\le y\le x\}}F(y)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\int_0^\infty F(x)e^{-\lambda x}\left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}\,dy\right)dx+\mu\int_0^\infty F(x)e^{-\mu x}\left(\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy\right)dx\\
&= (\lambda+\mu)\int_0^\infty F(x)e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx.
\end{aligned}$$
La variable aléatoire U est donc exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$.
2. Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(F\Big(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y)\Big)\Big) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f(\sqrt{x}\cos(y),\sqrt{x}\sin(y))e^{-x2}\,dx\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f(x\cos(y),x\sin(y))e^{-x^2/2}x\,dx\,dy,
\end{aligned}$$
d'après la formule du changement de variables utilisée avec le C^1-diffómorphisme suivant : $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]\mapsto(\sqrt{x},y)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]$. Puis d'après la formule du passage en coordonnées polaires, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f(x\cos(y),x\sin(y))e^{-x^2/2}x\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}f(u,v)e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv.$$
La loi de $(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y))$ est donc $(2\pi)^{-1}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv$.
Remarque : les variables $\sqrt{X}\cos(Y)$ et $\sqrt{X}\sin(Y)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
3. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ borélienne. On a
$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}g\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$
Et $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\mapsto(x/y,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien y^{-1}. Donc d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}g\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^2}g\left(\frac{x}{y}\right)|y|e^{-\frac{y^2}{2}(\frac{x^2}{y^2}+1)}|y|^{-1}\,dx\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}g(u)|v|e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,du\,dv\\
&= \int_{\mathbb{R}}g(u)\left(\int_{\mathbb{R}}|v|e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,dv\right)du\\
&= 2\int_{\mathbb{R}}g(u)\frac{1}{u^2+1}\,du.
\end{aligned}$$

Donc
$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\,du,$$
ce qui signifie que la loi de X/Y est la loi de Cauchy, c'est-à-dire la loi de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

□

3 – Lois de variables aléatoires

Exercice 2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. (c'est-à-dire $\mathbb{P}$ presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Corrigé :

1. Si $X = Y$ p.s. alors $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, ce qui montre que X et Y ont la même loi. La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire de densité $\sqrt{2\pi}^{-1}e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Posons $Y = -X$. Alors Y est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Alors
$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x)e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-x^2/2}\,dx.$$
Donc X et Y ont la même loi mais ne sont pas égales p.s.
2. (a) Pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, la fonction $g \circ f$ est borélienne. Comme X et Y ont la même loi, on a
$$\mathbb{E}(g \circ f(X)) = \mathbb{E}(g \circ f(Y)),$$
ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

(2) (b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z = X$. Alors $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$. La loi de X^2 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac δ_0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc XZ et YZ n'ont pas la même loi.

□

Exercice 3. **(Simulation de variables aléatoires.)** Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t) = \mathbb{P}(X \le t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,
$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}.$$
Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
Indication. On pourra vérifier que $\{F^{-1}(U) \le t\} = \bigcap_{n\ge 1}\{U < F(t+1/n)\}$.

3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, et X la variable aléatoire définie par $X = -\frac{1}{p}\ln(U)$. Déterminer la loi de X.

Corrigé :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\{F^{-1}(U) \le t\} = \{U \le F(t)\}$. Donc
$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le t) = \mathbb{P}(U \le F(t)) = F(t).$$
Or la fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Ainsi $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\{F^{-1}(U) \le t\} = \bigcap_{n\ge 1}\{U < F(t+1/n)\}$. Donc
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le t)\\ =\ & \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\ge 1}\left\{U < F\left(t+\frac{1}{n}\right)\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(U < F\left(t+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(t+\frac{1}{n}\right) = F(t),\end{aligned}$$
la dernière égalité étant une conséquence de la continuité à droite de F.

$\square$

Exercice 4. **(Variables exponentielles)**

1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s, t > 0$,
$$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$
Trouver toutes les variables aléatoires réelle positives X qui vérifient la propriété d'absence de mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Calculer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Corrigé :

1. Si X est exponentielle de paramètre λ alors $\mathbb{P}(X > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$, et la propriété d'absence de mémoire est vérifiée. Si X vérifie la propriété d'absence de mémoire alors la fonction $G : t \mapsto \log(\mathbb{P}(X > t))$ est additive. De plus, $G = \log(1 - F_X)$ est continue à droite, donc G est linéaire. Et $G \le 0$. Donc il existe $\lambda \ge 0$ tel que $G(t) = -\lambda t$ pour tout $t > 0$, et donc X est exponentielle de paramètre λ.
2. On pose $N = \lfloor X \rfloor$. On a
$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(X \in [k, k+1[) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k},$$
ce qui signifie que N suit la loi géométrique de paramètre $e^{-\lambda}$.

$\square$

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}\,dx$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Corrigé :
Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a par symétrie

$$\mathbb{E}(F(N^{-2})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\,dx.$$

Et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-2} \in \mathbb{R}_+^*$ est un C^1 difféomorphisme de Jacobien $-2x^{-3}$ donc d'après la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\,dx = \int_{\mathbb{R}_+^*} F(u)e^{-1/(2u)}(2u^{3/2})^{-1}\,du.$$

Donc la loi de $1/N^2$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-1/(2u)}\mathbb{1}_{\{u>0\}}\,du$. □

Exercice 7. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0,1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Corrigé :
Par continuité à droite de F on a $F(x) \in \{0,1\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}.$$

Comme $F(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$ on a $a < +\infty$. De même $a > -\infty$. Par continuité à droite de F, on a $F(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$, et donc F est la fonction de répartition de δ_a. □

Exercice 8. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \ldots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \ldots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \ldots \leq Y_n(\omega) \text{ et } \{Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$$

   pour presque tout $\omega \in \Omega$.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Corrigé :

1. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On peut définir pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_i(\omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X_{\sigma_i}(\omega)\mathbb{1}_{\{X_{\sigma_1}(\omega) < \ldots < X_{\sigma_n}(\omega)\}}.$$

   En effet, la mesure de Lebesgue des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ où deux coordonnées sont égales est nulle. Ainsi, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont bien définies.
2. Soit $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(Y_1, \ldots, Y_n)) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n}\int_{\{0 \leq x_{\sigma_1} < \ldots < x_{\sigma_n} \leq 1\}} f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n})\,dx_1 \ldots dx_n \\ &= n!\int_{\{0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq 1\}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.\end{aligned}$$

La loi de $(Y_1,\dots,Y_n)$ est donc
$$n!\,\mathbb{1}_{\{0\le x_1<\ldots<x_n\le 1\}}\,dx_1\dots dx_n.$$
Soit maintenant $g:]0,1[^{n-1}\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a
$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_1}{Y_2},\dots,\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right)=n!\int_{\{0<x_1<\ldots<x_n<1\}} g\left(\frac{x_1}{x_2},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)dx_1\dots dx_n.$$
Et $\phi:(x_1,\dots,x_n)\in\{0<x_1<\ldots<x_n<1\}\mapsto\left(\frac{x_1}{x_2},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n},x_n\right)\in\,]0,1[^n$ est un C^1-difféomorphisme de jacobien égal à $(x_2\dots x_n)^{-1}$. Ainsi, d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_1}{Y_2},\dots,\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right) &= n!\int_{]0,1[^n} g(u_1,\dots,u_{n-1})u_2u_3^2\dots u_{n-1}^{n-2}u_n^{n-1}\,du_1\dots du_n\\ &= (n-1)!\int_{]0,1[^{n-1}} g(u_1,\dots,u_{n-1})u_2u_3^2\dots u_{n-1}^{n-2}\,du_1\dots du_{n-1}.\end{aligned}$$
Donc la loi de $(Y_1/Y_2,\dots,Y_{n-1}/Y_n)$ est
$$(n-1)!\,u_2u_3^2\dots u_{n-1}^{n-2}\,\mathbb{1}_{]0,1[^{n-1}}(u_1,\dots,u_{n-1})\,du_1\dots du_{n-1}.$$
Remarque : les variables $Y_1/Y_2,\dots,Y_{n-1}/Y_n$ sont indépendantes, et chaque Y_i/Y_{i+1} est de loi $iy^{i-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)dy$.

□

Exercice 9. **(Pouvoir paranormal moyen)** On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k\ge1}\mathbb{P}(X\ge k).$$
3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

Corrigé :

1. Supposons que les cartes dans le paquet soient numérotées de 1 à 52. Le devin annonce les cartes dans un autre ordre, c'est à dire qu'il annonce une permutation de $\{1,\dots,52\}$. On se place donc sur $(\mathcal{S}_{52},\mathcal{P}(\mathcal{S}_{52}),\mathbb{P}=\#/52!)$.
2. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)=\sum_{k\ge1}k\,\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k\ge1}k\,(\mathbb{P}(X\ge k)-\mathbb{P}(X\ge k+1))\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}k\mathbb{P}(X\ge k)-\sum_{k=2}^{N+1}(k-1)\mathbb{P}(K\ge k)\right)\\ &= \sum_{k\ge1}\mathbb{P}(X\ge k).\end{aligned}$$

3. Le nombre de cartes que le devin trouvera est

$$X = \max\{k : \omega(1) < \omega(2) < \ldots < \omega(k)\}.$$

Et l'on a pour $1 \leq k \leq 52$

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq 52} \mathbb{P}(\{\omega : \omega(1) = j_1, \ldots, \omega(k) = j_k\}) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq 52} \frac{(52-k)!}{52!} = \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, il trouvera en moyenne

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{52} \frac{1}{k!} \approx e - 1.$$

□

Exercice 10. On considère un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table. On retourne une à une les cartes jusqu'à trouver une dame. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Corrigé :

On place toutes les cartes (face visible) en cercle sur la table (de sorte qu'on voit toutes les cartes), et on ajoute une cinquième dame fictive entre la première carte du paquet et la dernière carte du paquet. Les 53 cartes sont ainsi partionnées en cinq intervalles qui ont même loi (chaque intervalle commençant par la carte suivant une dame et finissant par une dame), de sorte que le nombre moyen de cartes dans le premier intervalle est 53/5. Le nombre de cartes qu'on aura vu étant le nombre de cartes entre la cinquième dame (excluse) et la première dame (incluse), on aura donc vu en moyenne 53/5 cartes. □

Fin