TD 11 — Fonctions caractéristiques – Corrigé

Exercice à chercher du TD précédent

Exercice 0. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1,0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2,\pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Corrigé :
Le point d'impact du rayon lumineux sur l'axe des ordonnées est $Y=\tan(t)$. Or $\phi : t \in]-\pi/2,\pi/2[\mapsto \tan(t)\in\mathbb{R}$ est un C^1-difféomorphisme de Jacobien $1+\tan^2(t)$. Donc, pour $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ borélienne, on a, d'après la formule du changement de variables,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\tan(t))\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\frac{dy}{1+y^2}.$$

La variable aléatoire Y suit donc la loi de Cauchy. □

0 – Petites questions

Exercice 1.

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}$?
2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$?

Corrigé :

1. On calcule, en intégrant par parties pour $t\neq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}}(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}e^{itx}dx = 2\int_0^1(1-x)\cos(tx)dx = 2\frac{1-\cos(t)}{t^2}.$$

   Pour $t=0$, la première intégrale vaut 1 (normal, c'est une densité de probabilité !).

2. D'après le cours, si μ est une mesure de probabilités dont la fonction caractéristique $\widehat{\mu}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ, alors μ est absolument continue par rapport à λ, et sa densité est donnée λ-p.p. par

$$x\mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\mu}(t)e^{-itx}dt.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\, 2\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-itx}.$$

Les deux membres étant des fonctions continues en x, on a l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $x = -x$, il s'ensuit que la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$ est $x \mapsto (1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}$.

□

Exercice 2. (Queues de variables aléatoires) Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de X par

$$\psi(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si X est intégrable, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x\psi(x) = 0.$$
2. Si X est dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x^p\psi(x) = 0.$$
3. Donner un équivalent de la queue de la loi d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Corrigé :

1. On a
$$\mathbb{E}(|X|) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \geq x)\,dx.$$
Donc la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(|X| \geq x)$ est intégrable. Elle est de plus décroissante ce qui implique le résultat. En effet, $t\mathbb{P}[|X| \geq 2t] \leq \int_t^{2t}\mathbb{P}[|X| \geq x]\,dx \to 0$ quand $x \to 0$.
2. On écrit similairement
$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \geq x^{1/p})\,dx,$$
de sorte que $x\mathbb{P}(|X| \geq x^{1/p}) \to 0$ quand $x \to \infty$.
Remarque. Une autre manière est de faire est d'écrire $x^p\mathbb{P}[|X| \geq x] = \mathbb{E}\left[x^p\mathbb{1}_{|X|\geq x}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^p\mathbb{1}_{|X|\geq x}\right] \to 0$ quand $x \to \infty$ par convergence dominée.
3. Si N désigne une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, on a
$$\mathbb{P}[N \geq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty du\, e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty du\,\frac{u}{x}e^{-u^2/2} = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$
Pour une minoration, on intègre par parties :
$$\int_x^\infty e^{-u^2/2}du = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{u^2}du.$$
On réintègre par parties :
$$\int_x^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{u^2}du = \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{3e^{-u^2/2}}{u^4}du.$$
Ainsi
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{3e^{-u^2/2}}{u^4}du \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}.$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}[N \geq x] \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

□

1 – Fonctions caractéristiques

Notation. Si X est une variable aléatoire réelle, on notera ϕ_X sa fonction caractéristique, définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$. Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice est par définition $z \mapsto \mathbb{E}\left[z^X\right]$.

Exercice 3.

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
   (a) Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
   (b) Binomiale de paramètres (n,p), avec $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$.
   (c) Géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.
   (d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes :
   (a) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
   (b) Uniforme sur $[0,1]$.

Corrigé :

1. Soit $s \in [0,1]$. On a
   (a) $G(s) = 1 - p + ps$,
   (b) $G(s) = (1 - p + ps)^n$,
   (c) $G(s) = \dfrac{1-p}{1-sp}$,
   (d) $G(s) = \exp(-\lambda(1-s))$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a
   (a) $\phi(t) = \dfrac{\theta}{\theta - it}$,
   (b) $\phi(t) = \dfrac{\exp(it) - 1}{it}$.

□

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe C^k et que pour tout entier $1 \le k \le n$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k \exp(itX)\right].$$

   En particulier :

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right] \tag{1}$$

2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$.

   Indication. On pourra considérer $\frac{\phi_X(t)+\phi_X(-t)-2}{t^2}$.

3. Soit $k \geq 2$ entier. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$ (ici $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x) donnés par (1).
4. Faire l'exercice 7.

Corrigé :

1. Ceci provient immédiatement du théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination $\left|i^k X^k \exp(itX)\right| \leq |X|^k \in \mathbb{L}^1$ pour $1 \leq k \leq n$.
2. La fonction ϕ_X étant deux fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young garantit un développement limité à l'ordre 2 :
$$\phi_X(t) = 1 + \phi_X'(0)t + \phi_X''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$
On en déduit que :
$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2} = \phi''(0). \tag{2}$$
Or $\phi_X(t) + \phi_X(-t) = 2\mathrm{Re}(\phi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$. Il s'ensuit par (2) que
$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\phi_X''(0).$$
Or $\frac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$. Le lemme de Fatou fournit donc :
$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[2\liminf_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right)\right] \leq 2\liminf_{t\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\phi_X''(0) < \infty.$$
La question 1. permet de conclure que $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$.
3. Raisonner par récurrence en adaptant la preuve de la question précédente.
4. L'exercice 7 montre qu'en général il n'est pas vrai que X admet un moment d'ordre 1 lorsque ϕ_X est dérivable en 0.

□

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On note $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$ pour simplifier, et on suppose qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en 0, telle que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t).$$

1. Prouver que pour tou t $a > 0$ on a
$$\mathbb{P}\left[|X_n| > \frac{2}{a}\right] \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - \mathrm{Re}(\phi_n(u)))\, du = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - \phi_n(u))\, du.$$
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u > 0$ et n_0 tels que pour $n > n_0$ on ait
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} |1 - \phi_n(t)| dt < \epsilon.$$
3. En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que
$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbb{P}[|X_n| > a] < 2\epsilon.$$

1. D'après le théorème de Fubini–Tonelli,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\phi_n(t))dt &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(\int_{\mathbb{R}}(1-e^{itx})\mathbb{P}_{X_n}(dx)\right)dt = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-a}^{a}(1-e^{itx})dt\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(ax)}{ax}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx) \geq \int_{|x|>2/u}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx)\end{aligned}$$

car pour tout réel t on a $1-\sin(t)/t \geq 0$ et $1-\sin(t)/t \geq 1-1/|t|$. Comme

$$2\int_{|x|>2/a}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx) \leq 2\int_{|x|>2/a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx) = \mathbb{P}\left[|X_n|>2/a\right],$$

ceci conclut.

2. Comme $|\phi(t)| = \lim_{n\to\infty}|\phi_n(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(0) = \lim_{n\to\infty}|\phi_n(0)| = 1$ et que ϕ est continue en 0, si $\epsilon > 0$ est fixé, il existe $u > 0$ tel que $|1-\phi(t)| < \epsilon/2$ pour $|t| < u$. Ainsi

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi(t)|dt < \epsilon.$$

Or $|1-\phi_n(t)| \leq 2$ et $|1-\phi_n(t)| \to |1-\phi(t)|$ quand $n \to \infty$. Par convergence dominée, il s'ensuit que

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi_n(t)|dt \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi(t)|dt < \epsilon.$$

Le résultat désiré en découle.

3. D'après la première question, pour $n \geq n_0$, $\mathbb{P}\left[|X_n| > \frac{2}{u}\right] > 2\epsilon$. Comme les variables aléatoires X_i sont réelles, il existe des réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ tels que

$$\mathbb{P}\left[|X_i| > a_i\right] < 2\epsilon, \qquad 0 \leq i \leq n_0 - 1.$$

En posant $a = \max(2/u, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1})$, on a bien

$$\mathbb{P}\left[|X_n| > a\right] < 2\epsilon$$

pour tout entier $n \geq 1$.

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $P_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ symétrique (càd $a_k = a_{-k}$) et telle que $\sum_{k\geq 0} ka_k = \infty$. Le moment d'ordre 1 de X est-il fini ? Trouver une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que ϕ_X soit dérivable en 0. Comparer avec l'exercice 4.

Corrigé :

On calcule aisément $\mathbb{E}\left[|X|\right] = 2\sum_{k>0} ka_k = +\infty$. D'autre part :

$$\phi_X(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt).$$

Choisissons $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$ et pour $k \geq 2$:

$$a_k = a_{-k} = \frac{c}{k^2\ln k}, \qquad \text{où } c = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}\right)^{-1},$$

de sorte que :

$$0 \leq \frac{1-\phi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}(1-\cos(tk)).$$

On vérifie ensuite que cette quantité tend vers 0 lorsque $t \to 0$ en décomposant cette dernière somme suivant que $k \geq 1/t$ ou $k < 1/t$. Tout d'abord :

$$\sum_{k\geq 1/t} \frac{1}{k^2 \ln k}\frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq -\frac{2}{t\ln(t)}\sum_{k\geq 1/t}\frac{1}{k^2} \leq -\frac{2}{t\ln(t)}\int_{\lfloor 1/t \rfloor -1} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{2}{t(\lfloor 1/t\rfloor -1)\ln(t)} \quad \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t}\sum_{2\leq k<1/t} \frac{1}{k^2 \ln k}\frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq t \sum_{2\leq k<1/t}\frac{1}{\ln(k)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}dx = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + \int_2^y \frac{1}{(\ln(x))^2}dx.$$

Mais lorsque $x \to \infty$, $1/(\ln x)^2 = o(1/\ln(x))$ et donc lorsque $y \to \infty$:

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}dx = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + o\left(\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}dx\right)$$

de sorte que

$$\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}dx \quad \underset{t\to 0}{\sim} \quad -\frac{1}{t\ln(t)}$$

Il s'ensuit que

$$t\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}dx \quad \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ceci achève de démontrer que $(1-\phi_X(t))/t \to 0$ lorsque $t \to 0$. □

Exercice 8. **(Problème des moments)** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x)\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right).$$

Calculer $\int_{\mathbb{R}+} x^k f(x)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des v.a. X et Y de densité respectives

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad (1+\sin(2\pi\ln x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right)?$$

Corrigé :

Soit $n \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^n \sin(2\pi\ln(x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et le changement de variable $u = \ln(x)$ aboutit à

$$I = \int_0^{\infty} \sin(2\pi\ln(x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-u^2}{2}+nu\right)\sin(2\pi u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du.$$

En remarquant que $-u^2/2+nu=-1/2(u-n/2)^2+n^2/2$, le changement de variable $v=u-n/2$ donne

$$I = Cste. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v) \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right) dv = 0.$$

Ainsi pour $\alpha \in [-1;1]$ les moments des lois $K(2+\alpha\sin(2\pi\ln(x)))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)$ avec

$$K^{-1} = \int_0^{\infty} 2\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right) dx$$

sont égaux sans que ces lois ne soient égales. $\square$

Fin