TD 13 — Lemmes de Borel–Cantelli – Corrigé

Exercice à chercher du TD précédent

Exercice 0. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1, notées $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

1. Que vaut $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2)$?
2. Quelle est la loi de $\ln(1 + \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2)$?
3. On considère également une famille $(P_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires réelles (définies aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) telle que P_t suit la loi de Poisson de paramètre t pour tout $t > 0$ et on suppose que $(P_t)_{t \geq 0}$ est indépendante du couple $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Soit finalement une variable aléatoire réelle X (définie aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), caractérisée par le fait que
$$\mathbb{E}[F(X)] = \frac{\mathbb{E}\left[F(P_{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}) \mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2\}}\right]}{\mathbb{P}[\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2]} \qquad \text{pour toute fonction } F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable.}$$
Trouver la loi de X.

Corrigé :

1. Comme les deux couples $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ et $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ ont même loi et que $\mathbb{P}[\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2] = 0$, on en déduit que
$$1 = \mathbb{P}[\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2] + \mathbb{P}[\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2] + \mathbb{P}[\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2] = 2\mathbb{P}[\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2].$$
Donc $\mathbb{P}[\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2] = 1/2$.
2. Pour $x \geq 0$, on calcule :
$$\mathbb{P}[\ln(1 + \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2) \geq x] = \mathbb{P}[1 + \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2 \geq e^x] = \mathbb{P}[\mathcal{E}_1 \geq \mathcal{E}_2(e^x - 1)] = \mathbb{P}\left[e^{-\mathcal{E}_2(e^x-1)}\right].$$
En effet, rappelons que pour toute fonctionnelle mesurable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, $\mathbb{E}[F(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)] = \mathbb{E}[G(\mathcal{E}_2)]$, où $G(x) = \mathbb{E}[F(\mathcal{E}_1, x)]$ car $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sond indépendantes. Or
$$\mathbb{P}\left[e^{-\mathcal{E}_2(e^x-1)}\right] = \int_0^\infty du\ e^{-u} \cdot e^{-u(e^x-1)} = \int_0^\infty du\ e^{-ue^x} = e^{-x}.$$
On en déduit que $\ln(1 + \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2)$ est une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. Posons $G : \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $G((x_t)_{t\geq 0}, u) = F(x_u)\mathbb{1}_{u>0}$. Comme $(P_t)_{t\geq 0}$ est indépendante de $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ et que
$$G((P_t)_{t\geq 0}, \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = F(P_{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2})\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1>\mathcal{E}_2\}},$$
on en déduit que
$$\mathbb{E}\left[F(P_{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2})\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1>\mathcal{E}_2\}}\right] = \mathbb{E}\left[H(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1>\mathcal{E}_2\}}\right],$$
où $H(x) = \mathbb{E}[F(P_x)]$. Mais
$$\mathbb{E}\left[H(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1>\mathcal{E}_2\}}\right] = \int dxdy\, H(x-y)\mathbb{1}_{\{x>y\geq 0\}}e^{-x-y} = \int dudyH(u)\mathbb{1}_{\{u,y\geq 0\}}e^{-u-2y}$$
en utilisant le changement de variable $x = u + y$. Ainsi
$$\mathbb{E}\left[H(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1>\mathcal{E}_2\}}\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty du\, H(u)e^{-u}.$$
Pour trouver la loi de X, calculons plutôt sa fonction caractéristique. Comme $\mathbb{E}\left[e^{itP_x}\right] = e^{x(e^{it}-1)}$, d'après ce qui précède on a
$$\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_0^\infty du\, e^{u(e^{it}-1)}e^{-u} = \frac{1}{2-e^{it}}.$$
On reconnaît la fonction caractéristique d'une variable aléatoire géométrique de paramètre $1/2$. En effet, si $\mathbb{P}[Y = k] = 1/2^{k+1}$ pour $k \geq 0$, on a
$$\mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \sum_{k\geq 0}\frac{e^{itk}}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{it}/2} = \frac{1}{2-e^{it}}.$$

Remarque. Si X est une variable aléatoire et A_0 un événement de probabilité strictement positive, alors la mesure μ définie par $\mu(A) = \mu(\{X \in A\} \cap A_0)/\mu(A_0)$ est appelée loi conditionnelle de X sachant A_0, et est caractérisée par le fait que si Y est une variable aléatoire suivant cette dernière loi, alors pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable on a $\mathbb{E}[F(Y)] = \mathbb{E}\left[F(X)\mathbb{1}_{A_0}\right]/\mathbb{P}[A_0]$. □

0 – Petites questions

Soit, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire exponentielle de paramètre n.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.
3. On suppose ici que les variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Calculer $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}[Z_n > Z_1]$. Commenter.

Corrigé :

1. Soit $\epsilon > 0$. On a $\mathbb{P}[Z_n > \epsilon] = e^{-n\epsilon}$. Donc
$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[Z_n > \epsilon] < \infty.$$
D'après le lemme Borel Cantelli, pour tout $\epsilon > 0$, presque sûrement, à partir d'un certain rang on a $Z_n \leq \epsilon$. Donc presque sûrement, pour entier $k \geq 1$, à partir d'un certain rang $0 \leq Z_n \leq 1/k$. On en déduit que Z_n converge presque sûrement vers 0.

2. Soit $A = \{\omega \in \Omega ; Z_n(\omega) \to 0 \text{ et } Z_1 > 0\}$. Soit $\omega \in A$. Alors à partir d'un certain rang $Z_n(\omega) < Z_1(\omega)$. Comme $\mathbb{P}[A] = 1$, ceci conclut.
3. On a $\mathbb{P}[Z_n > Z_1] = 1/(n+1)$ pour $n \geq 2$. Ainsi

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[Z_n > Z_1] = \infty.$$

Ici le théorème de Borel Cantelli ne s'applique pas car les événements $\{Z_n > Z_1\}$ ne sont pas indépendants.

□

1 – Lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$, et soit, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$ mais que, p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Corrigé :

On a,

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui signifie que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n = \{Z_n = 1\}$. Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ c'est-à-dire p.s., il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $Z_n = 0$ et ainsi $\limsup Z_n = 0$.

Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Les A_n étant indépendants, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ c'est-à-dire p.s., pour tout $n_0 \geq 1$, il existe $n \geq n_0$ tel que $Z_n = 1$ et ainsi $\limsup Z_n = 1$. □

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < F(a) < 1$. Montrer que p.s.,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

2. On pose $\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ et $\beta = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$. Montrer que $\alpha < \beta$, que $\alpha \neq +\infty$ et que $\beta \neq -\infty$.
3. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \beta \text{ et } \liminf_{n\to\infty} X_n = \alpha.$$

Corrigé :

1. On a $\limsup\{X_n > a\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} X_n \geq a\}$ et $\mathbb{P}(X_n > a) = 1 - F(a) \in]0,1[$. Donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > a) = +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli (les événements $\{X_n > a\}$ étant indépendants), on a

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n > a\}) = 1.$$

Ainsi p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq a$.

De même, $\limsup\{X_n \leq a\} \subset \{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a\}$, et on montre comme précedemment que p.s. $\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a$.

2. On a $\alpha \leq \beta$ car F est croissante. Supposons que $\alpha = \beta$. Alors par continuité à droite $F(\alpha) = 1$ et F est la fonction de répartition de la mesure δ_α ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Si $\beta = +\infty$ cela signifie que $F \equiv 1$ ce qui n'est pas possible car $F(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$. De même $\alpha \neq +\infty$.

3. Soit $(\beta_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante qui tend vers β telle que $\alpha < \beta_k < \beta$. D'après la question (1), on a pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \beta_k$. Ainsi, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \beta$. Supposons $\beta < +\infty$. Soit $k \geq 1$. On a $\{\limsup_{n\to\infty} X_n > \beta + 1/k\} \subset \limsup\{X_n > \beta + 1/k\}$. Or $F(\beta + 1/k) = 1$, le lemme de Borel-Cantelli assure donc que

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n > \beta + 1/k\}) = 0.$$

Ainsi pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \beta + 1/k$ puis, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \beta$.

Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers α telle que $\alpha < \beta_k < \beta$. D'après la question (1), on a pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha_k$. Ainsi, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha$. Supposons $\alpha > -\infty$. Soit $k \geq 1$. On a $\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \alpha - 1/k\} \subset \limsup\{X_n < \alpha - 1/k\}$. Comme $F(\alpha - 1/k) = 1$ pour tout $k \geq 1$, on conclut comme précedemment que, p.s., $\liminf_{n\to\infty} X_n \geq \alpha$.

□

Exercice 3. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$. Posons :

$$L_n := \max\{k \geq 1;\ \text{il existe } i \leq n-k \text{ tel que } X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\}.$$

1. Montrer que p.s. $\limsup_{n\to\infty} L_n/\ln(n) \leq 1/\ln(2)$.
2. Montrer que p.s. $\liminf_{n\to\infty} L_n/\ln(n) \geq 1/\ln(2)$.
3. Conclure.

Corrigé :

1. Pour $j \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_n \geq j) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n-j}\{X_{i+1} = \cdots = X_{i+j} = 1\}\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-j} \mathbb{P}(\{X_{i+1} = \cdots = X_{i+j} = 1\}) = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{2^j} = \frac{n-j+1}{2^j} \leq \frac{n}{2^j}.\end{aligned}$$

Soient $\epsilon > 0$ et $j = j(n) := \lfloor (1+\epsilon)\ln(n)/\ln(2) \rfloor$. Alors $\mathbb{P}(L_n \geq j_n) \leq 2/n^\epsilon$. Posons $n = n_k = \lfloor k^{2/\epsilon} \rfloor$ de sorte que $\sum_k \mathbb{P}(L_{n_k} \geq j(n_k)) < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $L_{n_k} < j(n_k) \leq (1+\epsilon)\ln(n_k)/\ln(2)$.

Soit $n \in [n_{k-1}, n_k[$ suffisamment grand. Alors

$$L_n \leq L_{n_k} < (1+\epsilon)\frac{\ln(n_k)}{\ln(2)} \leq (1+2\epsilon)\frac{\ln(n_{k-1})}{\ln(2)} \leq (1+2\epsilon)\frac{\ln(n)}{\ln(2)},$$

d'où le résultat.

2. Posons $k_n := \lfloor (1-\epsilon)\ln(n)/\ln(2)\rfloor$. Soit

$$A_i := \{X_{(i-1)k_n+1} = X_{(i-1)k_n+2} = \cdots = X_{ik_n} = 1\}, \qquad 1 \le i \le N_n := \lfloor n/k_n \rfloor.$$

Alors $\cup_{i=1}^{N_n} A_i \subset \{L_n \ge k_n\}$. Puisque les événements $A_i, 1 \le i \le N_n$ sont indépendants, ceci entraîne que

$$\mathbb{P}(L_n < k_n) \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N_n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{N_n} \mathbb{P}(A_i^c) = \mathbb{P}(A_1^c)^{N_n} = \left(1 - \frac{1}{2^{k_n}}\right)^{N_n},$$

qui est sommable en n. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand, $L_n \ge k_n \ge (1-\epsilon)\ln(n)/\ln(2) - 1$, d'où le résultat.

3. Ainsi, p.s. $\lim_{n\to\infty} L_n/\ln(n) = 1/\ln(2)$.

□

Exercice 4. Soit $(X_n, n \ge 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}[X \ge \alpha n] < \infty.$$

Indication. On pourra montrer que

$$\sum_{n\ge 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \le X < \alpha(n+1)) \le \mathbb{E}[X] \le \sum_{n\ge 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \le X < \alpha(n+1)).$$

En déduire la dichotomie suivante : p.s.

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{array} \right. .$$

Corrigé :

1. Tout d'abord, si X_1 est presque sûrement nulle, alors $\sum_n X_n = 0$ p.s. Supposons que X_1 n'est pas nulle, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}[X_1 > \varepsilon] > 0$. On a trivialement que $\sum_n \mathbb{P}[X_n > \varepsilon] = \infty$, et les X_n sont indépendants, donc par Borel-Cantelli, p.s. les X_n sont supérieurs à ε une infinité de fois, donc $\sum_n X_n = \infty$.
2. Soit X une v.a. positive et $\alpha > 0$, il est facile de vérifier les encadrements de X suivants :

$$\sum_{n\ge 0} \alpha n \mathbb{1}_{\alpha n \le X < \alpha(n+1)} \le X \le \sum_{n\ge 0} \alpha(n+1) \mathbb{1}_{\alpha n \le X < \alpha(n+1)}.$$

En prenant l'espérance de la ligne précédente on obtient

$$\alpha \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}[X \ge \alpha n] \le \mathbb{E}[X] < \alpha \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}[X \ge \alpha n] + \alpha,$$

dont il est facile de déduire que

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}[X \ge \alpha n] < \infty.$$

Soit $\alpha > 0$, $\limsup \frac{X_n}{n} \geq \alpha$ ssi il existe une infinité de n tels que $X_n \geq \alpha n$. D'après la question précédente,

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[X \geq \alpha n] \begin{cases} < \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ = \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases},$$

donc par Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left[\limsup \frac{X_n}{n} \geq \alpha\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ 1 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}$$

et par conséquent

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases} \quad \text{p.s.}$$

□

Exercice 5. (LFGN cas non intégrable) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n).$$
2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Corrigé :

1. On utilise la relation
$$\mathbb{E}(|X_1|) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > t)\, dt,$$
pour obtenir $\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_1| \geq n)$. Puis on a $\mathbb{P}(|X_1| \geq n) = \mathbb{P}(|X_n| \geq n)$.
2. Si X_1 n'est pas intégrable alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = +\infty$. Les événements $\{|X_n| \geq n\}$ étant indépendants, on a $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| \geq n\}) = 1$ d'après le lemme de Borel-Cantelli. On remarque que
$$\left\{\frac{S_n}{n} \to \text{ une limite reelle}\right\} \subset \left\{\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0\right\} \bigcap \left\{\frac{S_n}{n(n+1)} \to 0\right\}.$$
Donc
$$\left\{\frac{S_n}{n} \to \text{ une limite reelle}\right\} \subset \left\{\frac{X_n}{n} \to 0\right\} \subset (\limsup\{|X_n| \geq n\})^c.$$
Donc S_n/n diverge p.s.

□

Exercice 6. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \ldots\}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, la probabilité de l'ensemble des multiples de n soit égale à $1/n$.

Corrigé :
Voir le polycopié de Jean-François Le Gall (Application (1) en bas de la page 117). □

Exercice 7. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes définies par $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p$ avec $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$. On considère la marche aléatoire $Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ (avec $Z_0 = 0$). On note $A_n = \{Z_n = 0\}$.

a) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

b) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Corrigé :

a) $\limsup_{n\to\infty} A_n$ représente l'ensemble des trajectoires de Z_n qui repassent une infinité de fois par 0.

b) D'après le lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Or $\mathbb{P}(A_n)$ est nul si n est impair et

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \mathbb{P}(Z_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Or $\mathbb{P}(A_{2n+2})/\mathbb{P}(A_{2n}) = \frac{(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} p(1-p) \to 4p(1-p)$ quand $n \to \infty$. Or $4p(1-p) < 1$ puisque $p \neq 1/2$, d'où la convergence de la série.

$\square$

2 – Loi du 0–1 de Kolmogorov

Exercice 8. Montrer que si les variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes, la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.

Corrigé :
Notons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ sont définies.

Notons $\mathcal{F}_N = \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)$. La série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq N} X_n$ converge pour tout $N \geq 0$. Or

$$\left\{\omega \in \Omega; \sum_{n\geq N} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} \in \mathcal{F}_N. \tag{1}$$

On a donc

$$\left\{\omega \in \Omega; \sum_{n\geq 0} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} = \bigcap_{N\geq 0} \left\{\omega \in \Omega; \sum_{n\geq N} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} \in \bigcap_{N\geq 0} \mathcal{F}_N.$$

On conclut en utilisant la loi du 0–1 de Kolmogorov.

Remarque. Dans un but pédagogique, expliquons d'où vient (1) en détail. D'après le critère de Cauchy,

$$\left\{\omega \in \Omega; \sum_{n\geq N} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{k\geq N} \bigcap_{p,q\geq k} \left\{\omega \in \Omega; \left|\sum_{n=p}^{q} X_n(\omega)\right| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Or, pour $p, q \geq N$,

$$\left\{\omega \in \Omega; \left|\sum_{n=p}^{q} X_n(\omega)\right| < \frac{1}{k}\right\} \in \sigma(X_p, X_{p+1}, \dots, X_q) \subset \mathcal{F}_N,$$

ce qui établit (1) car $\mathcal{F}_N$ est une tribu. $\square$

Exercice 9. On suppose que les variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes.

a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} X_n z^n$ est presque sûrement constant.

b) On suppose maintenant que les variables aléatores $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi. Montrer que si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] = \infty$, alors $R = 0$ p.s. , et que si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] < \infty$, alors $R \geq 1$ p.s.

Corrigé :

a) Le rayon de converge R est donné par la formule

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}}.$$

Mais la variable aléatoire $\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}$ est mesurable par rapport à la tribu queue des $(X_n)_{n\geq 1}$, elle est donc presque sûrement constante d'après l'exercice 5 du TD 12.

b) On écrit

$$|X_n|^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(|X_n|)^+}{n}\right)\exp\left(-\frac{\ln(|X_n|)^-}{n}\right).$$

Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] < \infty$, alors d'après l'Exercice 4 : $\limsup_{n\to\infty} \ln(|X_n|)^+/n = 0$ et donc $\ln(|X_n|)^+/n \to 0$. On a alors $R \geq 1$ car $\exp\left(-\frac{\ln(|X_n|)^-}{n}\right) \leq 1$.

Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] = \infty$, alors d'après l'Exercice 4, $\limsup_{n\to\infty} \ln(|X_n|)^+/n = \infty$. Ceci implique que $\limsup_{n\to\infty} \ln(|X_n|)/n = \infty$ et donc $R = 0$ presque sûrement.

□

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives, de même loi. On considère l'événement F défini par :

$$F = \{\omega; \text{il existe une suite infinie croissante } (n_k)_{k\geq 1} \text{ pouvant dépendre de } \omega \text{ pour laquelle } X_{n_k}(\omega) > n_k\}.$$

a) Montrer que $\mathbb{P}(F) = 0$ ou 1.

b) Montrer que $\mathbb{P}(F)$ ne dépend que de $\mathbb{E}[X_1]$.

Corrigé :

a) En posant $A_n = \{X_n > n\}$, on voit aisément que

$$F = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_k.$$

Or $\cup_{n\geq k} A_k \in \sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$. Donc F appartient à la tribu asymptotique des $(X_n)_{n\geq 1}$. D'après la loi du 0–1 de Kolmogorov, $\mathbb{P}(F) = 0$ ou 1.

b) Supposons d'abord $\mathbb{E}[X_1] = \infty$. D'après la question 2 de l'exercice 4 (avec $\alpha = 1$), $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ étant indépendantes, il en découle que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ et donc $\mathbb{P}(F) = 1$.

Supposons maintenant $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. D'après la question 2 de l'exercice 4 (avec $\alpha = 1$), $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ et donc $\mathbb{P}(F) = 0$.

□

Exercice 12. (✯✯) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X_n = -1] = 1/2, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Montrer qu'avec probabilité 1, il n'existe aucun point z_0 du cercle de convergence de la série entière $F(z) = \sum_{n\geq 0} X_n z^n$ tel que F se prolonge autour de z_0 en une fonction développable en série entière autour de z_0.

Corrigé :
On dira qu'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes est analytique sur U si elle est développable en série entière autour de chaque point de U. On rappelle qu'une série entière est analytique en tout point de son disque ouvert de convergence.

Notons $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ et pour $\zeta \in D, r > 0$ notons $D_\zeta(r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - \zeta| < r\}$. Finalement notons

$$\mathcal{A}_F = \{z \in \mathbb{S}; F \text{ se prolonge autour de } z \text{ en une fonction développable en série entière autour de } z\}.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathbb{P}(\mathcal{A}_F \neq \emptyset) > 0$. On commence par se ramener (par un argument de densité) à montrer une propriété presque sûr pour **un** point et non pas tous les points de $\mathbb{S}$. Pour cela, soit $(q_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans $\mathbb{S}$. D'après le rappel, $\mathcal{A}_F$ est ouvert p.s. et donc

$$\{\omega; \mathcal{A}_F \neq \emptyset\} \subset \{\omega; \exists q_n \text{ tq } q_n \in \mathcal{A}_F\}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(\exists q_n \text{ tq } q_n \in \mathcal{A}_F) > 0.$$

Or

$$\mathbb{P}(\exists q_n \text{ tq } q_n \in \mathcal{A}_F\}) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(q_n \in \mathcal{A}_F)$$

Il existe donc $n \geq 1$ tel que $\mathbb{P}(q_n \in \mathcal{A}_F) > 0$. Pour simplifier, notons $q_n = q$.

Or si F se prolonge en une fonction développable en série entière autour de q, on peut trouver une suite de points $r_n \in \mathbb{C}$ tels que $|r_n| < 1$ tels que q appartienne au disque ouvert de convergence du développement en série entière en r_n. En raisonnant de la même manière qu'au paragraphe précédent, on en déduit l'existence de $\zeta \in D$ et $r > 0$ tel que $D_\zeta(r) \not\subset D$ et :

$$\mathbb{P}(F \text{ se prolonge en une fonction analytique sur } D \cup D_\zeta(r)) > 0.$$

Pour simplifier, notons $\mathcal{A} = \{\omega; F \text{ se prolonge en une fonction analytique sur } D \cup D_\zeta(r)\}$.

Montrons d'abord que $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$. Pour cela, on écrit pour $|u| < 1 - |\zeta|$:

$$F(\zeta + u) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\zeta + u)^n = \sum_{m=0}^{\infty} u^m \left(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} X_n \zeta^{n-m} \right).$$

Pour simplifier, notons $a_m = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} X_n \zeta^{n-m}$ qui sont donc les coefficients du développement en série entière de F autour de ζ. F est analytique sur $D_\zeta(r)$ si le rayon de convergence de cette série entière est au moins r. Ainsi, $\{F \text{ est analytique sur } D_\zeta(r)\}$ est un événement de la tribu asymptotique des $(X_n)_{n\geq 1}$, et donc $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0$ ou 1. Comme $\mathbb{P}(\mathcal{A}) > 0$, on a forcément $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$.

Par construction, l'arc $D_\zeta(r) \cap \mathbb{S}$ est non vide. Soit donc $k \geq 1$ un entier suffisamment grand tel que cet ait une longueur au moins égale à $2\pi/k$. Posons alors :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \not\equiv 0 \mod k \\ -X_n(\omega) & \text{si } n \equiv 0 \mod k \end{cases}$$

et introduisons

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n z^n$$

Comme la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ et la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ a la même loi, on a donc

$$\mathbb{P}(G \text{ se prolonge en une fonction analytique sur } D \cup D_\zeta(r)) = 1.$$

Or

$$F(z) - G(z) = 2\sum_{m=0}^{\infty} X_{mk} z^{mk}.$$

En remplaçant z par $ze^{2\pi i/k}$, cette expression ne change pas. Ainsi, en posons $D_\zeta^{(l)}(r) = \{ze^{2\pi il/k}; z \in D_\zeta^{(l)}\}$ pour tout $l \geq 1$, il s'ensuit que $F(z) - G(z)$ peut-être prolongée presque sûrement en une fonction analytique sur $\{|z| < 1 + \epsilon\}$ pour un certain $\epsilon > 0$ (on utilise ici le fait qu'une union fini d'ensembles d'événements de probabilité 1 reste de probabilités 1). Ceci est clairement absurde, car le rayon de convergence de $F - G$ est presque sûrement 1. $\square$

Fin