TD 14 — Convergence de variables aléatoires — Corrigé

Exercice à préparer du TD précédent

Exercice 0. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.
2. On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.
3. Montrer que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Corrigé :

1. Soit $a \geq 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'évènement $\{\limsup X_n/\ln(n) > a\}$ est imbriqué entre deux limsup d'évènements :

$$\limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq (a-\varepsilon)\ln(n)\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) > a\} \subset \limsup_{n\to\infty}\{X_n > a\ln(n)\}.$$

$$\mathbb{P}[X_n \geq a\ln(n)] = \frac{1}{n^a},$$

et les évènements sont indépendants, donc d'après Borel-Cantelli en prenant des ε apropriés

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} > a\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases},$$

donc $\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} = 1$ p.s.

2. Soit $\epsilon \in (0,1)$ et posons $A_n = \{Z_n \leq 1-\epsilon\}$. Montons que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X_i \leq (1-\epsilon)\ln(n) \text{ pour } 1 \leq i \leq n) = \mathbb{P}(X_1 \leq (1-\epsilon)\ln(n))^n = \left(1 - e^{-(1-\epsilon)\ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \leq \exp\left(-n\cdot\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right) \leq \exp\left(-n^{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

Donc $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand on a $Z_n \geq 1-\epsilon$, ce qui conclut.

3. Posons $B_n = \{Z_n \geq 1+\epsilon\}$. Un calcul proche de celui de la question précédente donne :

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)^n \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{n^{\epsilon}}.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

La série de terme général $1/n^\epsilon$ ne converge pas, il faut donc ruser un peu. Fixons $\eta > 0$ et posons $n_k = (1+\eta)^k$. Alors $\sum_k P(B_{n_k})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $Z_{n_k} \leq 1+\epsilon$. On encadre ensuite $n \geq 1$: $(1+\eta)^k \leq n \leq (1+\eta)^{k+1}$ et on écrit :

$$Z_n = \frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\dots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\dots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n_{k+1})}\frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} = Z_{n_{k+1}} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Il s'ensuit que $\limsup_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Compte tenu de la question 2, il en découle que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

□

0 – Petites questions

Exercice 1. Vrai ou faux ?

1. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en loi. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en loi pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité et μ une mesure positive. Alors il y a convergence étroite des μ_n vers μ si et seulement si, pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence
$$\int f\,d\mu_n \longrightarrow \int f\,d\mu.$$
3. Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

1. Vrai : si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue bornée, alors $g \circ f$ est continue bornée et donc $\mathbb{E}[g(f(X_n))] \to \mathbb{E}[g(f(X))]$.
2. L'implication est vraie (elle implique que μ est une mesure de probabilité, et on conclut par une propriété du cours), mais la réciproque est fausse (prendre $\mu_n = \delta_n$).
3. Faux : on prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$ et $X_n(t)$ la fonction tente telle que $X_n(0) = 0, X_n(1/n) = n, X_n(2/n) = 0$. Alors X_n converge p.s. vers 0 mais $\mathbb{E}[X_n] = 1 \neq \mathbb{E}[0]$.

   Un autre exemple davantage probabiliste : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On note $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et soit $T = \inf\{n \geq 1; Z_n = 1\}$. On pose finalement :
$$W_n = Z_{\min(n,T)}.$$
   Ainsi, (W_n) est la marche aléatoire issue de 0 qui fait des sauts ± 1 qui reste en 1 une fois qu'elle l'a atteint. Il est possible de vérifier que $T < \infty$ p.s. de sorte que (W_n) converge presque sûrement vers 1. Or il est facile de vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[W_n] = 0$, de sorte que $\mathbb{E}[W_n]$ ne converge pas vers $\mathbb{E}[1]$. Avec le langage du second semestre, cela fournit l'exemple d'une martingale qui converge p.s. mais pas dans $\mathbb{L}^1$.

□

Exercice 2. Quels sont les liens entre ces différentes convergences : en loi, presque sûre, en probabilité, $\mathbb{L}^1$, $\mathbb{L}^p$ pour $p > 1$?

Corrigé :

- Convergence *p.s.* implique convergence en probabilité qui implique convergence en loi.
- Convergence $\mathbb{L}^p$ pour $p \geq 1$ implique convergence en probabilité.
- Convergence $\mathbb{L}^q$ implique convergence $\mathbb{L}^p$ pour $q > p$.
- Vers une constante, convergence en loi et convergence en probabilité sont équivalentes.

Il est très fortement recommandé de trouver des contre-exemples pour les réciproques qui ne sont pas vraies en général. On a cependant les réciproques "partielles" suivantes :

- Convergence en probabilité implique la possibilité d'extraire une sous-suite qui converge p.s.
- En redéfinissant les variables sur un même espace de probabilité, il est possible de transformer convergence en loi vers converge p.s., c'est le théorème de représentation de Skorokhod mentionné en TD (**Attention :** c'est un résultat très subtil, qui ne garde pas les dépendences de construction des variables aléatoires, ni les corrélations (en particulier pas l'indépendance !).
- Convergence p.s. avec équiintégrabilité implique convergence L^1 (voir Exercice 9).

□

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que presque sûrement la variable aléatoire aléatoire $\limsup_{n\to\infty} X_n$ est constante.

Corrigé :

Notons $\mathcal{F}_N = \sigma(X_N, X_{N+1}, \ldots)$ et pous simplifier notons $Y = \limsup_{n\to\infty} X_n$. Alors Y est $\mathcal{F}_N$ mesurable pour tout $N \geq 1$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$Y \geq a \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty, n\geq N} X_n \geq a,$$

et clairement $\{\limsup_{n\to\infty, n\geq N} X_n \geq a\} \in \mathcal{F}_N$. Ainsi Y est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\infty = \cap_{N\geq 1}\mathcal{F}_N$. D'après la loi du $0-1$ de Kolmogorov, on a $\mathbb{P}[A] = 0$ ou 1 pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$. D'après l'exercie 5 du TD 12, Y est constante presque sûrement. □

1 – Convergences en loi

Exercice 4. (**Lemme de Slutsky**) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. **Lemme de Slutsky** On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Corrigé :

1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\Phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') \to \Phi_{(X,Y)}(t,t')$ pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. Et l'on a par indépendance,

$$\Phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') = \Phi_{X_n}(t)\Phi_{Y_n}(t') \to \Phi_X(t)\Phi_Y(t') = \Phi_{(X,Y)}(t,t').$$

2. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec Z gaussienne centrée. La variable Z étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue), c'est à dire $2Z = 0$ en loi, ce qui n'est pas.

3. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) \to \mathbb{E}(F(X, Y))$ pour une fonction F continue à support compact. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. On a alors $Y_n \to a$ en probabilité (résultat important à savoir prouver). Et

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X, a))| \\ \leq \quad & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| + |\mathbb{E}(F(X_n, a)) - \mathbb{E}(F(X, a))|. \end{aligned}$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, a)$ est continue et bornée donc $|\mathbb{E}(F(X_n, a)) - \mathbb{E}(F(X, a))| \to 0$. De plus, la fonction F est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver δ tel que $|F(x, y) - F(x', y')| \leq \varepsilon$ pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$. Alors, en notant M un majorant de F, on a

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \\ \leq \quad & \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|) \\ \leq \quad & \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a| \geq \delta\}}) + \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a| < \delta\}}) \\ \leq \quad & 2M\mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \delta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\limsup |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \leq \varepsilon$ et ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit que $|\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \to 0$, puis le résultat.

□

Exercice 5. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi μ. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. On suppose que μ est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et expliciter la loi limite.
2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard c'est-à-dire que $\mu(dx) = (\pi(1 + x^2))^{-1} dx$. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite. Rappel : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $n(1 - M_n)$ est à valeurs dans $[0, n]$. On a donc, pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) = 0$. Soit $t \geq 0$ fixé. Pour tout $n \geq t$, on a

$$\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Donc $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) \to (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$, et la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la suite $(n(1 - M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $t \leq 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n},$$

donc $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit maintenant $t > 0$. On a

$$\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) = \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0).$$

D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0) \to 0$. Et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t, M_n > 0\right) &= \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) \\ &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{n}} \frac{dx}{\pi(1 + x^2)}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right), \end{aligned}$$

car $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to \infty$. Ainsi, la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

□

2 – Convergences en probabilité

Exercice 6.

1. Montrer qu'une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge ps vers X.
2. Montrer que si une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers X. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive Y telle que $\mathbb{E}[Y] < \infty$ et $|X_n| \leq Y$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[Y]$ lorsque $n \to \infty$.

Corrigé :

1. L'implication est claire, car d'après un résultat du cours on peut extraire une sous-suite convergeante p.s. vers X pour toute suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers X.

   Pour la réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\epsilon > 0$ et une extractrice ϕ telle que $\mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| < \epsilon) > \epsilon$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe une extractice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge en probabilité vers X quand $n \to \infty$. Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}(|X_{\phi(\psi(n))} - X| < \epsilon) > \epsilon$ pour tout $n \geq 1$.
2. D'après la première question, il suffit de montrer que si ϕ est une extractrice, il existe une extractrice ψ telle que $f(X_{\phi(\psi(n))})$ converge p.s. vers $f(X)$. D'après la première question, il existe une extractrice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge p.s. vers X. La conclusion en découle par continuité de f.
3. Il suffit de montrer que pour toute extraction ϕ, il existe une autre extraction ψ telle que $\mathbb{E}\left[X_{\phi\circ\psi(n)}\right] \to \mathbb{E}[Y]$ lorsque $n \to \infty$. Soit donc ϕ une extraction. D'après la première question, il existe une extraction ψ telle que $X_{\phi\circ\psi(n)}$ converge presque sûrement vers X lorsque $n \to \infty$. Le fait que $\mathbb{E}\left[X_{\phi\circ\psi(n)}\right] \to \mathbb{E}[Y]$ lorsque $n \to \infty$ est alors une simple conséquence du théorème de convergence dominée.

□

Exercice 7. (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. En déduire que $T_n/(n \log n) \to 1$ en probabilité.

Corrigé :

1. On a $\tau_1^n = 1$. Soit $(t_2, \ldots, t_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \ldots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)$. En posant $t_1 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \ldots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{k=1}^{n-1} \Big\{ X_{t_1+\ldots+t_k} = \sigma(k), X_{t_1+\ldots+t_k+1} \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}, \ldots, \\
&\qquad X_{t_1+\ldots+t_k+t_{k+1}-1} \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} \Big\} \cap \{X_{t_1+\ldots+t_n} = \sigma(n)\} \Bigg) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} \\
&= \frac{n!}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1}
\end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et ont respectivement pour loi

$$\sum_{i \geq 1} \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{i-1} \delta_i.$$

Cette loi est la loi de $G_k + 1$ où G_k suit la loi géométrique de paramètre $(k-1)/n$.

2. On a $T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$\mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1},$$

où H_n est la série harmonique et

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)/n}{((n+1-k)/n)^2} \leq Cn^2.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n)\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{\varepsilon^2 n^2 \log(n)^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \log(n)^2}.$$

Donc $(T_n - \mathbb{E}(T_n))/(n \log(n)) \to 0$ en probabilité. Or $\mathbb{E}(T_n) \sim n \log(n)$ quand $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \geq 2\varepsilon n \log(n)\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n)\}$ pour n assez grand. On obtient ainsi le résultat.

□

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Corrigé :

La faqn la plus rapide de faire cette exercice est d'utiliser ce qu'on connait déjà : d'après Radon-Nikodym on peut trouver une fonction f mesurable positive qui vérifie

$$\forall A \in \mathcal{A}, \;\; \mathbb{Q}(A) = \int f \mathbb{1}_A d\mathbb{P},$$

et de plus $\int f\,d\mathbb{P} = 1 < \infty$, donc f est intégrable. Ensuite, par l'absolue continuité de l'intégrale,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) < \varepsilon.$$

Et enfin, soit $\eta > 0$, pour n assez grand $\mathbb{P}[|X_n - X| > \eta] < \delta$, donc pour n assez grand $\mathbb{Q}[|X_n - X| > \eta] < \varepsilon$. □

3 – Convergences $\mathbb{L}^p$

Exercice 9. (**Uniforme intégrabilité**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) est uniformément intégrable (ou equiintégraable ou u.i.) si

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] = 0.$$

1. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est dominée par une v.a. Y intégrable, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. alors
$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty,$$
mais que la réciproque est fausse.
3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$
Montrer que la réciproque est vraie à condition de supposer $\sup \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.
4. Soit $p > 1$, montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$ (*ie* $\sup \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$), alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
5. On suppose que $X_n \to X$ p.s.
   (a) On suppose que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
   (b) Réciproquement, on suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
      i. Montrer que X est intégrable.
      ii. Montrer que la suite $(X_n - X)_{n\geq 1}$ est u.i.
      iii. En déduire que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$.

Corrigé :
Ceci est biensûr réminscent de l'exercice 9 du TD 4.

1. Pour tout n, $|X_n| \leq Y$, donc pour tout n
$$\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] \leq \mathbb{E}[|Y| \mathbb{1}_{\{|Y|>M\}}] \to 0$$
par convergence dominée.
2. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. alors $\lim_{M\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] = 0$, on peut ainsi trouver M_0 tel qu'on ait $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M_0\}}] = K_0 < \infty$. On a alors
$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] \geq K_0 + M_0 < \infty.$$
Pour un contre-exemple à la réciproque, il suffit de prendre des approximations de la mesure de dirac, ou en terme de v.a. $\mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$, comme (X_n) est u.i., on peut trouver M_1 tel que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M_1\}}] < \varepsilon/2$. Ensuite, si $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_n|>M_1\}}] + \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_n|\leq M_1\}}] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M_1\mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Donc avec $\delta = \frac{\varepsilon}{2M_1}$ on a le résultat souhaité. Pour la réciproque, si $M > \frac{\sup \mathbb{E}[|X_n|]}{\delta}$, alors par l'inégalité Markov $\mathbb{P}[X_n > M] < \delta$ et par l'hypothèse

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] < \varepsilon \quad \forall n \geq 1\ \forall M > \frac{\sup \mathbb{E}[|X_n|]}{\delta}.$$

4. On suppose que $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$, et on va essayer d'appliquer le critère précédent. Par Hölder ou Jensen $E[|X_n|] \leq \|X_n\|_p$, donc la première hypothèse est vérifiée. Maintenant par Hölder :

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] \leq \|X_n\|_p \mathbb{P}(A)^{1/q},$$

avec $q < \infty$ puisqu'on a pris $p > 1$, et avec $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\sup \|X_n\|_p}\right)^q$ on a la relation voulue.

5. On suppose que $X_n \to X$ p.s.

   (a) On suppose que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$, on va à nouveau utiliser le critère de la question 3. Comme $\mathbb{E}[|X_n|] \to \mathbb{E}[|X|]$, la suite est bornée et on a la première hypothèse. Prenons $\varepsilon > 0$, et soit $N > 0$ tq $\forall n > N$, $\mathbb{E}[|X_n - X|] < \varepsilon/2$. On peut trouver δ_1 et δ_2 tels que

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) < \delta_1 &\Rightarrow \max_{1\leq i\leq N} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] < \varepsilon, \\ \mathbb{P}(A) < \delta_2 &\Rightarrow \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

   Ensuite si $n > N$, on a

   $$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X_n - X|] + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon.$$

   (b) Réciproquement, on suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.

      i. Par Fatou,

      $$\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf \mathbb{E}[|X_n|] \leq \sup \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$$

      ii. On utilise à nouveau le critère de la question 3., mais je n'ai pas envie de le faire une troisième fois.

      iii. Soit $\varepsilon > 0$ et $M_2 > 0$ tel que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n-X|>M_2\}}] < \varepsilon$. La suite de v.a. $|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\leq M_2\}}$ converge vers 0 p.s. et est dominée par M_2, donc par convergence dominée

      $$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n-X|>M_2\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\leq M_2\}}] \leq \varepsilon + o(1),$$

      ce qui achève la démonstration.

□

4 – Pour préparer l'examen

Réviser le cours et ce qui a été fait en TD. Chercher des exercices examens des années précédents (les énoncés sont disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 10.

1. Soit m une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité m_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :
$$m_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m([k/n, (k+1)/n[)\delta_{k/n}.$$
Montrer que $(m_n, n \geq 1)$ converge étroitement vers m.
2. En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires, chaque X_n étant de loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Corrigé :

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi m. Alors on voit que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $Y_n = \lfloor nX \rfloor / n$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) suit la loi m_n. Et $Y_n \to X$ p.s. Donc $Y_n \to X$ en loi, ce qui signifie que $m_n \to m$ étroitement.
2. On pose $m(dx) = e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\, dx$. Alors on vérifie que pour tout $n \geq 1$, m_n est la loi de la variable aléatoire X_n/n. En effet,
$$\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-k/n} - e^{-(k+1)/n} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x}\, dx = m_n(\{k/n\}).$$

□

Exercice 11. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Corrigé :
Si $x_n \to x$ et si X est de loi δ_x alors pour toute fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}(g(X_n)) = g(x_n) \to g(x) = \mathbb{E}(g(X))$, ce qui signifie que $X_n \to X$ en loi.

Si $X_n \to X$ en loi alors $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ pour tout $t \in D$ où D est l'ensemble des points de continuité de F (D est dense car le complémentaire d'un ensemble dénombrable). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(t) \in \{0, 1\}$ et donc $F_X(t) \in \{0, 1\}$ pour tout $t \in D$. Comme F_X est croissante, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x. Soit O un ouvert contenant x. Alors
$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O) = 1.$$
Ainsi $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) = 1$ ce qui signifie que $x_n \in O$ à partir d'un certain rang. On a donc bien $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. □

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace (pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E, d)).

Corrigé :
On énumère $\Omega = \{\omega_i\}_{i\geq 1}$. Soit X et (X_n) des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que
$$X_n \xrightarrow{(P)} X.$$

Pour montrer que X_n converge p.s. vers X, il suffit de montrer que pour tout $k > 1$

$$\mathbb{P}(\{\omega, \limsup_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) = 0.$$

Soit $\omega_i \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$. D'après la convergence en probabilité de X_n vers X, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $\omega_i \notin \{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}$. On en déduit que pour tout ω_i de probabilité strictement positive, $\limsup d(X_n(\omega_i), X(\omega_i)) \leq 1/k$. La dénombrabilité de Ω permet de conclure. $\square$

Exercice 13. (✪) Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $N(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ convergent vers respectivement m et σ, et identifier la loi limite.

Corrigé :

On rappelle que la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2 est $\Phi_{m,\sigma^2}(t) = \exp(imt - \sigma^2 t^2/2)$. La réciproque découle ainsi immédiatement du théorème de Lévy (petite remarque : lorsque $\sigma = 0$, la gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est par convention constante égale à m).

Pour l'implication, supposons que Y_n converge en loi vers Y. Le théorème de Lévy garantit que $\exp(im_n t - \sigma_n^2 t^2/2)$ converge pour tout réel t lorsque $n \to \infty$, et donc que $\exp(-\sigma_n^2 t^2/2)$ converge (en prenant le module). Il s'ensuit que σ_n^2 converge vers $\sigma^2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Or $|\mathbb{E}[\exp(itY_n)]|$ converge vers $|\mathbb{E}[\exp(itY)]|$ qui est une fonction continue en t, ce qui exclut le cas $\sigma^2 = \infty$ (car alors $|\mathbb{E}[\exp(itY_n)]| \to \mathbb{1}_{t=0}$).

Il s'ensuit que $\exp(im_n t)$ converge pour tout réel t lorsque $n \to \infty$. Montrons que cela entraîne la convergence de la suite (m_n). Si on sait a priori que la suite (m_n) est bornée, c'est facile : si m et m' sont deux valeurs d'adhérence on a $\exp(imt) = \exp(im't)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $m = m'$. Supposons la suite (m_n) non bornée et montrons qu'on arrive à une contradiction. On extrait une sous-suite (m_{n_k}) qui converge vers $+\infty$ (on fait le même raisonnement pour $-\infty$). Alors pour tout $A > 0$, d'après le théorème de Portmanteau :

$$\mathbb{P}(Y \geq A) \geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}(Y_{n_k} \geq A) \geq 1/2$$

puisque pour k suffisamment grand on a $\mathbb{P}(Y_{n_k} \geq A) \geq \mathbb{P}(Y_{n_k} \geq m_{n_k}) = 1/2$. La contradiction souhaitée arrive en faisant tendre $A \to \infty$. $\square$

Exercice 14. (✪) Soit $\lambda > 1$ fixé et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une famille de variables aléatoires telle que, pour tout $t \geq 0$, X_t suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-t}$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}[X_t = k] = e^{-t}(1 - e^{-t})^{k-1}, \qquad k \geq 1.$$

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\lambda U_n - \ln(n)$ converge en probabilité vers $-\ln(\mathcal{E})$ lorsque $n \to \infty$, où $\mathcal{E}$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que les deux familles $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $X_{U_n}/n^{1/\lambda}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle, dont le paramètre est aléatoire et vaut $\mathcal{E}^{1/\lambda}$.

Corrigé :

On va utiliser les fonctions caractéristiques. Pour cela, calculons d'abord la fonction caractéristique de X_t :

$$\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = \frac{1}{1 - e^t(1 - e^{-iu})}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Par indépendance de $(X_t)_{t\geq 0}$ et U_n, on a donc

$$\mathbb{E}\left[e^{iuX_{U_n}/n^{1/\lambda}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1-e^{U_n}(1-e^{-iu/n^{1/\lambda}})}\right].$$

En faisant un développant limité, on voit que, presque sûrment,

$$\frac{1}{1-e^{U_n}(1-e^{-iu/n^{1/\lambda}})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{E}^{1/\lambda}}{\mathcal{E}^{1/\lambda}-iu}.$$

Or

$$\forall s\geq 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \qquad \left|\frac{1}{1-e^{s}(1-e^{-it})}\right| \leq 1.$$

D'après le théorème de convergence dominé, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[e^{iuX_{U_n}/n^{1/\lambda}}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{E}^{1/\lambda}}{\mathcal{E}^{1/\lambda}-iu}\right].$$

Le résultat en découle car, on a $x/(x-iu) = \mathbb{E}\left[e^{iu\mathsf{Exp}(x)}\right]$, où $\mathsf{Exp}(x)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre x. □

Fin