TD 5 — Théorèmes de Fubini, calculs

1 – Petites questions

0) Expliquer pourquoi il n'y a pas de faute d'orthographe dans le titre du TD.

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = 0$ si $x = y = 0$.

   Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y)$ et $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y)$. Diabolique, non ?

2) En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx\, dy$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

3) En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\, dy$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1} \sin(x) e^{-tx}\, dx.$$

2 – Théorèmes de Fubini

Exercice 1. **(Truc de ouf)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que

$$\text{pour } \lambda \text{ presque tout } y \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(\{x \in \mathbb{R};\, f(x) = y\}) = 0.$$

Exercice 2. **(Quelque chose d'utile)** Sur un espace mesuré σ-fini $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on considère $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g \circ f\, d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\, dt.$$

   Indication : On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.

2. Montrer que $\displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_0^{\infty} \mu\{f \geq t\} dt.$

3. On suppose que μ est finie et qu'il existe $p \geq 1$ et $c > 0$ tels que pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| > t\}) \leq ct^{-p}$. Montrer que $f \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in [1, p[$. A-t-on forcément $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$?

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3 – Calculs

Exercice 3.
1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(E,\mathcal{A},\mu)\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que
$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n|d\mu<\infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\left(\int_E f_n d\mu\right)=\int_E\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)d\mu.$$
2. Calculer les intégrales
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx,\ \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx.$$

Exercice 4. Soit $\varphi:([0,1],\mathcal{B}([0,1]))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ par
$$F(t)=\int_{[0,1]}\sqrt{\varphi(x)^2+t}\,dx.$$
1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 5. (D'après Partiel 2008) Étudier la convergence de la suite $u_n=\int_{]0,\infty[}\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}dt$. On précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 6. Soit $f:([0,+\infty[,\mathcal{B}([0,+\infty[)\to([0,+\infty[,\mathcal{B}([0,+\infty[))$ une fonction mesurable.
1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par la formule
$$F(x)=\int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}dt,\quad x\geq 0.$$
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x\to\infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. On définit une fonction $\mu:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to[0,+\infty]$ par
- $\mu(A)=0$ si A est une partie finie ou dénombrable,
- $\mu(A)=+\infty$ sinon.

Soit K l'espace triadique de Cantor défini par $K=\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{3^n}:(a_n)_{n\geq 1}\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}\right\}$. On rappelle que K est un compact de $[0,1]$, infini non-dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle. On pose $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x-y\in K\}$.

1. Vérifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,\mu(dy) \right) dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx \right) \mu(dy)$. Conclure.

Exercice 8. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$.

Exercice 9. (La fonction Γ)
Pour tout $t > 0$ on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

1. Montrer que ceci définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$f_n : x \in]0,\infty[\mapsto 1_{]0,n[}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}.$$

Exercice 10. Soit $\varphi : ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par

$$G(t) = \int_{[0,1]} |\varphi(x) - t|\, dx.$$

1. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est dérivable en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lambda(\{\varphi = t\}) = 0,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Fin