TD 6 — Approximations – Corrigé

0 – Exercices à préparer

Exercice -1. (D'après Partiel 2008) Étudier la convergence de la suite $u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt$. On précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

Corrigé :

On écrit
$$u_n = \int_{]0,1[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt + \int_{]1,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt = I_n + J_n$$
et on étudie séparément les deux intégrales I_n et J_n.

Pour la première, on remarque que sur $]0,1[$ la quantité $\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}$ tend simplement vers $\frac{1}{1+t}\mathbb{1}_{t\in]0,1[}$, en étant dominée en valeur absolue par $1/(1+t)$, qui est une fonction intégrable sur $]0,1[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $I_n \to \int_{]0,1[} \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$.

Pour la seconde, pour $n \geq 1$, on remarque que sur $]1,\infty[$ la quantité $\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}$ tend simplement vers 0, en étant dominée en valeur absolue par $\frac{1}{t(1+t)}$, qui est une fonction intégrable sur $]1,\infty[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $J_n \to 0$. On conclut que $u_n \to \ln(2)$. □

Exercice 0. Soit $f : ([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[) \to ([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2} dt, \quad x \geq 0.$$
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé :

1. On pose $g(x,t) = \arctan(xf(t))/(1+t^2)$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue. De plus pour tout $x \geq 0$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable et $|g(x,t)| \leq \pi/(2(1+t^2))$. Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. Alors $g(x_n,t) \to \pi/(2(1+t^2))\mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}$ pour tout $t \geq 0$. La domination utilisée à la question précédente permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir que

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)} \mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\, dt.$$

   Ainsi

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)} \mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\, dt.$$

3. Pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable de dérivée

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}.$$

   Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{1}{a(1+t^2)}.$$

   Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$, elle est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

4. On va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Supposons que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ soit intégrable. Alors pour tout $x \geq 0$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

   Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ ne soit pas intégrable. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Alors pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

   Donc d'après le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)}\, dt = \infty.$$

   Ainsi $F(x_n)/x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. □

□

1 – Petite question

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

   Que dire de μ ?

2. On suppose maintenant que μ est finie et que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ ?

Corrigé :

1. Si on prend $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on voit que
$$\mu(A) = \int_A g(x)dx.$$
Ainsi μ est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. On va montrer que la conclusion est la même. Si $a < b \in \mathbb{R}$, considérons $\phi_k(x) = (kd(x,]a,b[^c)) \wedge 1$, qui est une fonction lipschitzienne tendant simplement en croissant vers $\mathbb{1}_{]a,b[}$. Ainsi,
$$\int \phi_n(x)\mu(dx) = \int \phi_n(x)g(x)dx,$$
et d'après le théorème de convergence monotone, ceci implique
$$\mu(]a,b[) = \int_{]a,b[} g(x)dx.$$
En particulier, ceci impose que g est intégrable. En utilisant le lemme de la classe monotone, on conclut que
$$\mu(A) = \int_A g(x)dx$$
pour tout borélien $A \in \mathbb{R}$. Ainsi μ est encore la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.

□

1 – Calculer en cent leçons

Exercice 1. (**Formule des compléments**) On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

1. Calculer la mesure image de la mesure
$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{\{x,y\geq 0\}}\,dx\,dy,$$
par l'application $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$.
2. En déduire la formule des compléments :
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Corrigé :

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On veut calculer

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy.$$

Soit $\phi : (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$, qui est un C^1-difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ de jacobien

$$\mathrm{Jac}(\phi)(x,y) = -\frac{1}{x+y}.$$

D'après la formule du changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \\
&\quad = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \left((x+y)\frac{x}{x+y}\right)^{a-1} \left((x+y) - (x+y)\frac{x}{x+y}\right)^{b-1} (x+y) e^{-(x+y)} (x+y)^{-1}\, dx\, dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} f(u,v) (uv)^{a-1} (u - uv)^{b-1} u e^{-u}\, du\, dv \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} f(u,v) e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1}\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Donc la mesure image par $(x,y) \mapsto (x+y, x/(x+y))$ de la mesure $x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x,y>0\}}\, dx\, dy$ est

$$e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1} \mathbb{1}_{\{u>0, 0<v<1\}}.$$

2. D'après le théorème de Fubini-Tonelli la masse totale de cette mesure est

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1}\, du\, dv = \Gamma(a+b) \int_0^1 dt\, t^{a-1} (1-t)^{b-1}.$$

On trouve donc la formule des compléments.

□

2 – Approximations

Exercice 2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\, \lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Corrigé :

Solution 1. On vérifie aisément que la classe des boréliens A tels que $\int_A f(x)\, \lambda(dx) = 0$ est une classe monotone (pour la stabilité par union croissante on peut utiliser le théorème de convergence dominée). Elle contient les intervalles ouverts, qui forment une classe stable par intersections finies engendrant la tribu borélienne. On a donc $\int_A f(x)\,\lambda(dx) = 0$ pour tout borélien A d'après le lemme de la classe monotone. En particulier,

$$\int_{\{f>0\}} f\,d\lambda = 0.$$

Or $f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ est une fonction positive donc $f\mathbb{1}_{\{f>0\}} = 0$ λ-p.p. De même, $f\mathbb{1}_{\{f<0\}} = 0$ λ-p.p. Donc $f = 0$ λ-p.p.

Solution 2. Soient f^+ et f^- respectivement les parties positive et négative de f, et les mesures positives $d\nu_+ = f^+ d\lambda$ et $d\nu_- = f^- d\lambda$. On a, pour tous $a < b$, $\nu_+(]a,b[) = \nu_-(]a,b[)$. Or ν_+ et ν_- sont des mesures boréliennes positives de masse finie, donc le théorème d'unicité des mesures implique $\nu_+ = \nu_-$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \int_A f\,d\lambda = 0.$$

On conclut comme dans la solution 1.

□

Exercice 3. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a,b[) \le \nu(]a,b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \le \nu(A)$ pour tout borélien A.

Corrigé :

Tout d'abord, on remarque que $\mu(]a,b[) \le \nu(]a,b[)$ si $a,b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ (pour le voir, on peut par exemple utiliser la sigma additivité de μ et ν.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mu(O) \le \nu(O)$. Il existe une suite d'intervalles $(]a_n,b_n[)_{n\ge 1}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ telle que

$$O = \bigcup_{n\ge 0}]a_n, b_n[$$

où l'union est disjointe. Ainsi

$$\mu(O) = \sum_{n\ge 0} \mu(]a_n,b_n[) \le \sum_{n\ge 0} \nu(]a_n,b_n[) = \nu(O).$$

Puis, les mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ étant régulières extérieurement, on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O); A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \inf\{\nu(O); A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \nu(A).$$

Cela conclut. □

Exercice 4. (Fonction de répartition d'un ensemble) Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda(]-\infty, x] \cap A)$ est continue.

Corrigé :

Elle est 1-Lipschitzienne ! Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors

$$|f(x) - f(y)| \le \lambda([x,y] \cap A) \le |x-y|.$$

□ □

Exercice 5. (✱– Théorème de Lusin) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Indication. On pourra commencer par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0,1]$.

Corrigé :

Commençons par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0,1]$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un fermé F et un ouvert O tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda(O \backslash F) \leq \varepsilon.$$

Il existe alors une fonction continue à valeur dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur F et 0 en dehors de O, en effet $\mathrm{d}(F, O^c) = \eta > 0$ par compacité et on vérifie que la fonction

$$f_{F,O} : x \mapsto \sup\left(\left(1 - \frac{\mathrm{d}(x,F)}{\eta}\right), 0\right),$$

vérifie bien les conditions requises. Donc la fonction $f_{F,O}$ est continue et

$$\lambda(\{x, f(x) \neq f_{F,O}(x)\}) \leq \lambda(O \backslash F) \leq \varepsilon.$$

Dans le cas général, on peut supposer que $0 \leq f \leq 1$ et on définit par récurrence
— $f_1 = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{f \geq 1/2}$
— $f_2 = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{(f-f_1) \geq 1/4}$
— $f_3 = \frac{1}{8}\mathbf{1}_{(f-f_1-f_2) \geq 1/8}$
— ...

Ainsi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et pour tout n, $2^n f_n$ est une fonction indicatrice d'un borélien de $[0,1]$. D'après les résultats précédents pour chaque $n \geq 1$, il existe une fonction $0 \leq h_n \leq 1$ continue telle que $\lambda(x, h_n(x) \neq 2^n f_n(x)) \leq \varepsilon 2^{-n}$. La fonction continue $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n$ répond alors à la question. □

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (✱) Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On suppose que μ est de masse infinie et que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Est-ce que forcément $\mu(A) = \int_A g(x)dx$ pour tout borélien $A \in \mathbb{R}$?

Corrigé :

Si la mesure μ n'est pas finie mais finie sur tous les compacts (ce qui revient à fire que g est localement intégrable), il est aisé d'adapté le raisonnement de la petite question pour obtenir une réponse affirmative.

En revanche, si on ne fait aucune hypothèse sur μ, le résultat tombe en défaut, comme le montre le contre-exemple suivant (dû à Omar Mohsen). On commence par construire une fonction positive mesurable g d'intégrale infinie (pour la mesure de Lebesgue) sur tout intervalle ouvert. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une énumération des rationnels, et considérons la fonction mesurable

$$h(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{x - r_n}} \mathbb{1}_{0 < x - r_n < 1}.$$

Posons $g = h^2$. On vérifie que h est intégrable, ce qui implique $h < \infty$ p.p. et donc $g < \infty$ p.p. En revanche, on vérifie que pour tous $a < b$:

$$\int_{]a,b[} g(x)dx = \infty.$$

Soit alors μ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, de sorte que pour tous $a < b$:

$$\infty = \mu(]a,b[) = \int_{]a,b[} g(x)dx. \tag{1}$$

Maintenant, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue bornée, écrivons f comme limite croissante de fonctions en escalier :

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \inf_{]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[} f \cdot \mathbb{1}_{]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[}.$$

Le théorème de convergence monotone et (1) fournissent

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Cependant il n'est pas vrai que $\mu(A) = \int_A g(x)dx$ pour tout borélien $A \in \mathbb{R}$. En effet :

$$1 = \mu(\{0\}) \neq \int_{\{0\}} g(x)dx = 0.$$

□

Exercice 8. (✯) Trouver un espace topologique $\mathcal{T}$ et une mesure μ sur $(T, \mathcal{B}(T))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

Corrigé :
Soit X un ensemble non dénombrable, qu'on munit de la topologie co–dénombrable τ_X (les ouverts sont par définition $\emptyset$ et les sous-ensembles $B \subset X$ pour lesquels B^c est dénombrable). La tribu borélienne de X est alors constituée par les éléments B tels que B ou B^c soit dénombrable (en effet, on vérifie aisément que ces éléments forment une tribu).

Remarquons tout de suite que si $B \subset X$ est infini, alors B n'est pas compact. En effet, soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de B, posons $A = \{a_1, a_2, \ldots,\}$ et $B_n = A^c \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors $\cup_{n\geq 1} B_n$ est un recouvrement ouvert de B duquel on ne peut pas extraire un recouvrement fini.

Soit μ la mesure définie sur (X, τ_X) par :

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } B^c \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$

Vérifions que μ est une mesure. À cet effet, considérons une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles disjoints de X et posons $B = \cup_{n\geq 1} B_n$. Si tous les B_n sont dénombrables, $\mu(B_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\mu(B) = 0$; on a bien $\mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$. Si un des B_n est de complémentaire dénombrable, tous les autres sont dénombrables car ils sont disjoints (s'en convaincre). Dans ce cas on a bien aussi $\mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$.

Il est clair en revanche que μ n'est pas tendue car d'après ce qu'on a vu précédemment les compacts ont mesure nulle.

Et si on veut une mesure de masse totale 1 non tendue sur la tribu borélienne d'un espace métrique ... ?

□

Fin