TD 8 — Séries de Fourier, espaces de Hilbert, espaces $\mathbb{L}^p$ – Corrigé

On rappelle les notations suivantes :

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{e}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $\mathbf{e}_k(t) = \exp(2i\pi kt)$ et note de la même façon sa restriction à $[0,1]$.
- On note $F_n = \mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_k; -n \leq k \leq n\}$.
- Lorsque $f \in \mathbb{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$, on note $c_n(f) = \int_{[0,1]} f(t) e^{-2i\pi nt} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et

$$p_{F_N}(f) = \sum_{|k| \leq N} c_k(f) \mathbf{e}_k, \qquad \Phi_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{0 \leq n \leq N} p_{F_n}(f).$$

pour $N \geq 0$

0 – Exercice à chercher du TD précédent

Exercice 1. Soient $r, s \in [1, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |g(y)| \leq c|y|^{r/s}. \tag{1}$$

Soit Φ l'application de $\mathbb{L}^r(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$ définie par $\Phi(f) = g \circ f$.

1. Vérifier que $\Phi(f) \in \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que Φ est continue.
   Indication : on pourra utiliser le critère séquentiel de la continuité, et utiliser la question 1) des petites extractions du début du TD.
3. Que se passe-t-il si la condition (1) n'est plus satisfaite ?

Corrigé :

1. Par hypothèse, pour $f \in \mathbb{L}^r$, $|\Phi(f)(x)|^s = |g(f(x))|^s \leq c^s |f(x)|^r$ est intégrable.
2. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions telle que $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^r} f$. Montrons que $\Phi(f_n) \xrightarrow{\mathbb{L}^s} \Phi(f)$. À cet effet, on utilise le lemme des sous-sous-suites suivant (qui se démontre aisément en raisonnant par l'absurde), et qui parfois de bien précieux services :

   Lemme des sous-sous suites. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si et seulement de toute suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ on peut ré-extraire une sous-suite ψ telle que $(x_{\phi(\psi(n))})_{n \geq 1}$ converge vers x.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Soit donc ϕ une extractrice fixée. Comme $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\mathbb{L}^r} f$, il existe une extractrice ψ et $h \in \mathbb{L}^r$ tels que $f_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} f$ et $|f_{\phi(\psi(n))}| \leq |h|$ pour tout $n \geq 1$. Mais alors :

$$\left|g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f)\right|^s \quad \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} \quad 0$$

par continuité de g, et

$$\left|g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f)\right|^s \leq 2^s(|g(f_{\phi(\psi(n))})|^s + |g(f)|^s) \leq (2c)^s(|h(x)|^r + |f(x)|^r) \quad \in \quad \mathbb{L}^1.$$

Le théorème de convergence implique :

$$\int \left|g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f)\right|^s d\mu \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

ce qui revient à dire que $g(f_{\phi(\psi(n))}) \xrightarrow{\mathbb{L}^s} g(f)$, et conclut la question.

3. Alors on n'a pas forcément $\Phi(f) \in \mathbb{L}^s$. En effet, considérons une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ telle que $|g(y_n)| > n|y_n|^{r/s}$. Définissons alors la fonction étagée f comme suit :

$$f = \sum_{n\geq 1} y_n \mathbb{1}_{A_n},$$

où les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont des boréliens disjoints tels que $\mu(A_n) = 1/(n^{1+s} \cdot |y_n|^r)$. Alors

$$\|f\|_r^r = \sum_{n\geq 1} |y_n|^r \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+s}} < \infty,$$

mais

$$\|g \circ f\|_s^s = \sum_{n\geq 1} |g(y_n)|^s \mu(A_n) > \sum_{n\geq 1} n^s |y_n|^r \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

□

1 – Petites questions

1) Soient f, g deux fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Rappeler pourquoi $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

2) Prouver que

$$\Phi_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k(f) \mathbf{e}_k.$$

Corrigé :

1) Comme la fonction $f - g$ appartient à $\mathbb{L}^2([0,1])$, l'identité de Parseval prouve que $\|f - g\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f-g)|^2 = 0$. Donc $f = g$ dans $\mathbb{L}^2$, autrement dit $f - g = 0$ presque partout. Comme $f - g$ est continue, on en déduit que $f = g$. En effet, $(f-g)^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de de mesure nulle, donc est vide.

On peut aussi utiliser le théorème de Féjer vu en cours.

2) On écrit

$$\begin{aligned}
\Phi_N(f) &= \frac{1}{N+1} \sum_{0\leq n\leq N} \sum_{|k|\leq n} c_k(f)\mathbf{e}_k = \frac{1}{N+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{|k|\leq n, n\leq N\}} c_k(f)\mathbf{e}_k \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\mathbf{e}_k \sum_{n=|k|}^{N} 1 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\mathbf{e}_k (N+1-|k|),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2 – Séries de Fourier

Exercice 2. **(Théorème de Féjer version $\mathbb{L}^p$ et injectivité des coefficients de Fourier)** Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathbb{L}^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$.

1. Soit $1 \leq r \leq \infty$. Si $g \in \mathbb{L}^r(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ prouver que $\|g * h\|_r \leq \|g\|_r \cdot \|h\|_1$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Hölder avec la mesure à densité $|h(y)|dy$.
2. Prouver que $\|f - \Phi_N(f)\|_p \to 0$ lorsque $N \to \infty$.
   Indication : on pourra essayer d'approximer f.
3. En déduire que si $f \in \mathbb{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$ et que $c_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ presque partout.

Corrigé :

1. Soit s l'exposant conjugé de r (càd $1/s + 1/r = 1$). On écrit l'inégalité de Hölder avec la mesure à densité $|h(y)|dy$:

$$\int |g(x-y)||h(y)|dy \leq \left(\int 1^s |h(y)|dy \right)^{1/s} \left(\int |g(x-y)|^r |h(y)|dy \right)^{1/r}.$$

   En élevant à la puissance r et en intégrant l'inégalité obtenue par rapport à dx, il vient

$$\| \, |g| * |h| \, \|_r^r \leq \|h\|_1^{r/s} \| \, |g|^r * |h| \, \|_1 = \|h\|_1^{r/s} \|g\|_r^r \|h\|_1 = \|g\|_r^r \|h\|_1^r,$$

   ce qui conclut.
   Remarque. Il s'agit d'un cas particulier de l'exercice 5 du TD 7.
2. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une fonction continue f_ϵ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\|f - f_\epsilon\|_p \leq \epsilon$. D'après le théorème de Féjer, il existe un entier N tel que $\|f_\epsilon - \Phi_n(f_\epsilon)\|_p \leq \epsilon$ pour $n \geq N$. Alors, pour $n \geq N$

$$\|f - \Phi_n(f)\|_p \leq \|f - f_\epsilon\|_p + \|f_\epsilon - \Phi_n(f_\epsilon)\|_p + \|\Phi_n(f_\epsilon) - \Phi_n(f)\|_p \leq 2\epsilon + \|\Phi_n(f_\epsilon - f)\|_p.$$

   Ensuite, en notant K_n le noyau de Féjer (qu'on rappelle être positif d'intégrale égale à 1), il vient d'après la première question

$$\|\Phi_n(f_\epsilon - f)\|_p = \|(f_\epsilon - f) * K_n\|_p \leq \|f_\epsilon - f\|_p \|K_n\|_1 = \|f_\epsilon - f\|_p \leq \epsilon.$$

   Ainsi, pour $n \geq N$

$$\|f - \Phi_n(f)\|_p \leq 3\epsilon.$$

3. Si $c_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $\Phi_N(f) = 0$ ce qui implique que $f = 0$ dans $\mathbb{L}_p$ par la question précédente.

□

Exercice 3. (**Noyau de Poisson**) Pour $0 \leq r < 1$ et $y \in \mathbb{R}$ on note $P_r(y)$ le noyau de Poisson défini par

$$P_r(y) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(y) + r^2}.$$

On pourra vérifier que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{iny} = P_r(y).$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable, continue presque partout, 1-périodique telle que $\int_{[0,1]} |f| dx < \infty$.

1. Montrer que pour tout $0 \leq r < 1$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \in Z} c_n(f) r^{|n|} e^{2i\pi nx} = \int_{[0,1]} f(x-y) P_r(2\pi y) dy.$$

2. En déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{2\mathrm{i}\pi nx} \underset{r \to 1, r<1}{\longrightarrow} f(x).$$

3. ★★★– Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable, 1-périodique telle que $\int_{[0,1]} |f| dx < \infty$, est-il encore vrai que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{2\mathrm{i}\pi nx} \underset{r \to 1, r<1}{\longrightarrow} f(x)?$$

Remarque culturelle. Si $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, et $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt, \quad 0 \leq r < 1$$

est l'unique fonction sur $\overline{\mathbb{D}}$ harmonique sur $\mathbb{D}$ et coincidant avec f sur $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Ceci illustre l'importance du noyau de Poisson.

Pour voir que u est bien harmonique, on peut voir que c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe (voir exercice 5 pour une définition) par une autre représentation intégrale équivalente :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(e^{it}) \right).$$

Corrigé :

1. Comme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \int_{[0,1]} \left| f(x-y) e^{2i\pi ny} \right| dy < \infty,$$

d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{[0,1]} f(x-y) P_r(2\pi y) dy = \int_{[0,1]} f(x-y) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{2i\pi ny} \right) dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \int_{[0,1]} f(x-y) e^{2i\pi ny} dy.$$

De plus, par périodicité,

$$\int_{[0,1]} f(x-y) e^{2i\pi ny} dy = \int_{[x-1,x]} f(u) e^{2i\pi n(x-u)} du = e^{2i\pi nx} \int_{[0,1]} f(u) e^{-2i\pi nu} du = e^{2i\pi nx} c_n(f).$$

2. On vérifie aisément que $P_r(2\pi y)$ est une approximation de l'unité :

$$P_r(2\pi y) \geq 0, \qquad \int_0^1 P_r(2\pi y) dy = 1, \qquad \forall \eta \in (0,1), \int_{\eta \leq |y| \leq 1} P_r(2\pi y) dy \to 0.$$

Les techniques usuelles (découpage de l'intégrale) montrent que

$$\int_{[0,1]} f(x-y) P_r(2\pi y) dy \underset{r \to 1}{\longrightarrow} f(x)$$

en tout point de continuité de f. Il faut cependant faire attention car ici on veut avoir des convergences ponctuelles ! Détaillons donc le raisonnement.

On fixe x un point de continuité de f. On pose pour $r \in]0,1]$:

$$A(r) = \frac{1}{r} \int_{0 \leq y \leq r} |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Alors :

(i) A est continue sur $]0,1]$,

(ii) $A(r) \to 0$ quand $r \to 0$,

(ii) A est bornée sur $[0,1]$.

Prouvons ces assertions. La continuité de A est une conséquence immédiate de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale vue dans un TD précédent. La deuxième assertion découle de la continuité de f en x. La troisième assertion est une conséquence de (i) et (ii).

Pour simplifier, posons $K_\delta(y) = P_{1-\delta}(2\pi y)$ pour $0 \leq \delta \leq 1$ et $y \in [0,1]$, et posons $K_\delta(y) = 0$ si $y \notin [0,1]$. On vérifie aisément qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$0 \leq K_\delta(x) \leq \frac{C}{\delta} \tag{2}$$

et

$$0 \leq K_\delta(x) \leq C\frac{\delta}{x^2}. \tag{3}$$

pour tous $0 \leq \delta \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Revenons à nos moutons et découpons l'intégrale en tranches pour un $0 < \delta < 1$:

$$\int_{[0,1]} |f(x-y)-f(x)|K_\delta(y)dy = \int_{0\leq y\leq \delta} |f(x-y)-f(x)|K_\delta(y)dy + \sum_{k=0}^{\ln(1/\delta)/\ln(2)-1} \int_{2^k\delta \leq y \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)|K_\delta(y)dy.$$

Pour majorer la première somme, on utilise (2) :

$$\int_{0\leq y\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|K_\delta(y)dy \leq \frac{C}{\delta}\int_{0\leq y\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|dy \leq CA(\delta).$$

Pour majorer les autres sommes, en utilisant (3), on écrit

$$\begin{aligned}
\int_{2^k\delta\leq y\leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|K_\delta(y)dy &\leq \frac{C\delta}{(2^k\delta)^2}\int_{2^k\delta\leq y\leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|dy \\
&\leq \frac{2C}{2^k}\cdot\frac{1}{2^{k+1}\delta}\int_{0\leq y\leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|dy. \\
&= \frac{2C}{2^k}\cdot A(2^{k+1}\delta).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_{[0,1]} |f(x-y) - f(x)|K_\delta(y)dy \leq CA(\delta) + \sum_{k\geq 0}\frac{2C}{2^k}\cdot A(2^{k+1}\delta).$$

où on pose par convention $A(r) = 0$ pour $r > 1$.

Fixons alors $\epsilon > 0$ et $N > 0$ tel que $\sum_{k \geq N} 2^{-k} < \epsilon$. Comme $A(r) \to 0$ quand $r \to 0$, en choisissant $\delta > 0$ suffisamment petit, on a $A(2^k \delta) < \epsilon/N$ pour $0 \leq k \leq N-1$. On én déduit alors que

$$\int_{[0,1]} |f(x-y) - f(x)| K_\delta(y) dy \leq C'\epsilon.$$

Le résultat en découle.

Remarquez qu'ici nous avons eu besoin de propriétés additionnelles (2) et (3) pour le noyau de Poisson, qui ne sont pas forcément vérifiées pour toutes les approximations de l'unité.

3. Le résultat reste vrai, car il est possible de montrer que

$$\int_{[0,1]} f(x-y) P_r(2\pi y) dy \quad \underset{r \to 1}{\longrightarrow} \quad f(x)$$

en tout point x tel que

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_{|x-y|<\eta} |f(x) - f(y)| dy \quad = \quad 0.$$

De plus, pour $f \in \mathbb{L}^1$, presque tous les points $x \in \mathbb{R}$ vérifient cette propriété.

Pour plus de détails, voir par exemple l'ouvrage "Real analysis : measure theory, integration and Hilbert spaces" de Stein & Shakarchi (Théorème 3.1 du Chapitre 4 et Théorème 2.1 du Chapitre 3 et Corollaire 1.6 du Chapitre 3).

□

3 – Espaces de Hilbert

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; \|x\| = 1\}$.

1. Prouver que $\|T\| = \sup\{|\langle T(x), y\rangle|; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.
2. Prouver qu'il existe une unique application linéaire $T^* : H \to H$ telle ques les trois propriétés suivantes soient vérifiées :
   (a) $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$
   (b) $\|T\| = \|T^*\|$
   (c) $(T^*)^* = T$
   L'application linéaire continue T^* est appelée *adjoint* de T.
3. – Si $T = T^*$ (on dit que T est symétrique), prouver que

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|; \|x\| = 1\}.$$

Corrigé :

1. Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $|\langle T(x), y\rangle| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, ce qui implique que $\|T\| \geq \sup\{|\langle T(x), y\rangle|; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

   Réciproquement, supposons que $\sup\{|\langle T(x), y\rangle|; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq M$ et montrons que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in H$. On peut supposer $T(x) \neq 0$ et $x \neq 0$. Alors $x/\|x\|$ et $T(x)/\|T(x)\|$ sont de norme 1, ce qui implique que $\|T(x)\|/\|x\| = \langle T(x/\|x\|), T(x)/\|T(x)\|\rangle| \leq M$, d'où le résultat.

2. On remarque que la forme linéaire $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ est continue pour tout $y \in H$, ce qui, par le théorème de Riesz, donne l'existence d'un unique élément z_y tel que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, z_y\rangle$. Ceci prouve l'unicité, et pour l'existence il suffit de poser $T^*(y) = z_y$.

   Pour prouver que $\|T\| = \|T^*\|$, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \|T^*\|. \end{aligned}$$

   Pour la dernière assertion, il suffit d'écrire

$$\langle x, T(y)\rangle = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \langle T^*(x), y\rangle = \langle x, (T^*)^*(y)\rangle.$$

3. Posons $M = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| = 1\}$. D'après la première question, $M \leq \|T\|$. Réciproquement, si $x, y \in H$, on a l'identité de polarisation

$$\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right).$$

   De plus, comme $T = T^*$, $\langle T(x), x\rangle$ est réel pour tout $x \in H$ car $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T^*(x)\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$. On en déduit que

$$\mathfrak{Re}\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y,\rangle\right).$$

   Or $|\langle T(x), x, |\rangle \leq M\|x\|^2$ pour tout $x \in H$, ce qui implique

$$|\mathfrak{Re}\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right).$$

   L'identité du parallélogramme implique alors

$$|\mathfrak{Re}\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

   Ainsi, si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, $|\mathfrak{Re}\langle T(x), y\rangle| \leq M$. On en déduit que $|\langle T(x), y\rangle| \leq M$ si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ en prenant $e^{it}y$ (avec $t \in \mathbb{R}$) à la place de y.

□

Exercice 5. **(Opérateurs de Hilbert-Schmidt)** On se place dans $H = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (ce qui suit reste valable pour $H = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ mais on prend $d = 1$ pour simplifier les notations). Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Lorsque pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ la quantité $T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y) dy$ est bien définie, on dit que $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur intégral et que K est son noyau.

Si $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt*. Dans la suite, on considère un opérateur de Hilbert-Schmidt T de noyau K.

1. Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $y \mapsto K(x,y) f(y)$ est intégrable.
2. Montrer que l'application linéaire T est continue et que $\|T\| \leq \|K\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}$.
3. Prouver que l'adjoint T^* de T est un opérateur intégral de noyau $(x,y) \mapsto \overline{K(y,x)}$.

Remarque culturelle. L'étude des espaces de Hilbert a été initiée par des questions d'existence de solutions à l'équation $f - T(f) = g$ avec g fixé et T un opérateur intégral à noyau.

Corrigé :

1. D'après le théorème de Fubini–Tonelli, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto |K(x,y)|^2$ est intégrable. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)||f(y)|dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy\right)^{1/2} < \infty.$$

2. D'après l'inégalité obtenue à la question précédente,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy\right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy\right).$$

En intégrant cette inégalité par rapport à dx,on en déduit que

$$\|T(f)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|K\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})},$$

d'où le résultat.

3. On, écrit pour $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, et en utilisant le théorème de Fubini (les quantités en jeu sont intégrables) :

$$\langle T(f), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy = \int_{\mathbb{R}} dy f(y)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} dx \overline{K(x,y)}g(x)\right)}.$$

On conclut en remarquant que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} dy \overline{K(y,x)}g(y)$ est un opérateur intégral de noyau $(x,y) \mapsto \overline{K(y,x)}$

□

4 – À chercher pour la prochaine fois

Pour préparer le partiel à venir, chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sur disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. **(Théorème de Fatou)** On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. On dit qu'une fonction $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si pour tout $z \in \mathbb{D}$ la limite

$$\lim_{y \to z, y \in \mathbb{D}} \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

existe. Soit $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Montrer que pour presque tout $t \in [0,1]$ la limite

$$\lim_{r \to 1, r < 1} F(re^{2i\pi t})$$

existe.

On admettra (ceci sera prouvé dans le cours d'analyse complexe) que F est developpable en série entière en tout point de $\mathbb{D}$ et que si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est le développement en série entière de F autour de 0, alors cette série convergence normalement lorsque $z = re^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ fixé.

Indication. On pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{2i\pi n t}$ *et admettre que la réponse à la dernière question de l'exercice 2 est oui.*

Corrigé :
Soit $f_r(t) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{2i\pi nt} = F(re^{2i\pi t})$ pour $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}$. Ceci est la série de Fourier de la fonction $t \mapsto F(re^{2i\pi t})$ car d'après le théorème de convergence dominée

$$a_n r^n = \int_{[0,1]} F(re^{2i\pi t}) e^{-2i\pi nt} dt$$

pour $n \geq 0$. De plus cette dernière intégrale est nulle pour $n < 0$.

Soit $M > 0$ tel que $|F(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'après l'identité de Parseval appliquée à f_r,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \int_{[0,1]} |F(re^{2i\pi t})|^2 dt \leq M^2.$$

En faisant tendre $r \to 1$, le théorème de convergence monotone montre que $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Il est donc légitime de poser

$$G(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n e^{2i\pi nt}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

où la limite est prise dans $\mathbb{L}^2$, de sorte que $c_n(G) = a_n$ pour $n \geq 0$ et $c_n(G) = 0$ pour $n < 0$.

En admettant que la réponse à la réponse à la dernière question de l'exercice 2 est oui, on en déduit que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(re^{2i\pi t}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(G) r^{|n|} e^{2i\pi nx} \quad \xrightarrow[r\to 1, r<1]{} \quad G(t).$$

$\square$

Exercice 7. **(Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$.)** On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \leq p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.
   (a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.
   (b) Montrer que pour tout n assez grand, $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon$.
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.
2. Conclure.

Corrigé :

1. On note M un majorant de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

(a) Soit $n \geq 1$ fixé. On note $\mathcal{F}_n' = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\overline{\omega}} : f \in \mathcal{F}\}$ Tout d'abord on a $\mathcal{F}_n' \subset \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \overline{\omega}$, d'après l'inégalité de Jensen (appliquée à la mesure de probabilité $\rho_n(y)dy$), on a

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f} * \rho_n(x)\right| &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy\right)^{1/p} \\
&\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \\
&\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} M.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}_n'$ est une famille bornée de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Et pour $x, x' \in \overline{\omega}$, on a

$$\begin{aligned}
|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)(\rho_n(x-y) - \rho_n(x'-y))dy\right| \\
&\leq \|\rho_n'\|_\infty |x-x'| \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|\, d\lambda \\
&\leq \|\rho_n'\|_\infty |x-x'| \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \lambda(\Omega)^{1-1/p} \\
&= C_n |x-x'|.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}_n'$ est une famille équicontinue de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}_n'$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Or pour $g \in \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$, on a $g_{|\omega} \in \mathbb{L}^p(\omega)$ et $\|g_{|\omega}\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq (\lambda(\omega))^{1/p} \|g\|_\infty$. Donc l'injection de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ est continue. Ainsi, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

(b) Soit δ associé à ε et ω par la propriété (ii). Soit $n_0 \geq \delta^{-1}$. Pour $n \geq n_0$, $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \omega$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f} * \rho_n(x) - f(x)\right|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(x-y) - f(x)\right) \rho_n(y)\, dy\right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - f(x)\right|^p \rho_n(y)\, dy \\
&= \int_{[-1/n, 1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy,
\end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)}^p &\leq \int_\omega \int_{[-1/n, 1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{[-1/n, 1/n]} \int_\omega |f(x-y) - f(x)|^p\, dx\, \rho_n(y)\, dy \\
&= \int_{[-1/n, 1/n]} \|\tau_y f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)}^p \rho_n(y)\, dy \\
&\leq \varepsilon^p \int_{[-1/n, 1/n]} \rho_n(y)\, dy \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour $n \geq n_0$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) La famille $\mathcal{F}_{n_0}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε. D'après la question (b), ces mêmes boules de rayon 2ε recouvrent $\mathcal{F}$.

2. Comme $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon/2$. Et d'après la question (1), $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par des boules $B(g_i, \varepsilon/2), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\omega)$). On note G_i les fonctions g_i prolongées à Ω par 0. Alors les boules $B(G_i, \varepsilon), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\Omega)$) recouvrent $\mathcal{F}$.

$\square$

Fin