III Processus ponctuels de Poisson

Ici E, espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtration complète càd.

1) Définition

Déf Soit n une mesure σ-finie sur E. Un processus ponctuel de Poisson sur E de mesure caractéristique n est une mesure de Poisson $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $dt \otimes n(de)$.

Lemme p.s, $\forall t \geq 0$, $\mathcal{N}(\{t\} \times E) = 0$ ou 1.

Preuve On écrit $E = \coprod_{n\geq 1} E_n$ avec $n(E_i) < \infty$.

Alors $\mathbb{R}_+ \times E = \coprod_{k\geq 0, n\geq 1} E_{k,n} := [k, k+1[\times E_n$.

Or $N_{k,n} := \mathcal{N}([k, k+1[\times E_n) < \infty$ p.s, et conditionnellement à $N_{k,n}$ les atomes de $[k, k+1[\times E_n$ sont iid de loi $dt \otimes n(de)|_{E_{k,n}}$. En particulier, leur première composante est uniforme sur $[k, k+1[$. Donc elles sont p.s $\neq$. $\boxtimes$

Corollaire Si N est un ppPoisson, et si $n(A) < \infty$, alors $N_t(A) := N([0,t] \times A)$ est un processus de Poisson de paramètre $n(A)$.

Déf On dit que N est un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson si N est un processus ponctuel de Poisson et si $\forall A_1, \dots, A_p$ tq $n(A_i) < \infty$, le processus
$$(N_t(A_1), \dots, N_t(A_p))$$
est $(\mathcal{F}_t)$ adapté et à accroissements indépendants et stationnaires par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.

en particulier, $t \mapsto N_t(A)$ $\overset{\text{si } n(A)<\infty}{}$ est un processus

Prop Soit N un $(\mathcal{F}_t)$ pp Poisson de mesure caractéristique n et $A \in \mathcal{E}$ tq $0 < n(A) < \infty$.

Soit $T = \inf\{t \geq 0 ; N_t(A) = 1\} < \infty$ p.s.

Soit $e_T \in E$ tq $N(\{T\} \times B) = \delta_{e_T}(B)$ $\forall B \in \mathcal{E}$.

Alors e_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\forall B \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(e_T \in B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}.$$

De plus $e_T \perp\!\!\!\perp T$

Preuve Comme $\{e_T \in B\} = \{N_T(A \cap B) = 1\}$, e_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable. On écrit ; pour $B \subset A$

$\mathbb{P}(e_T \in B, t < T)$ Soit $N_1(t) = N([0,t] \times B)$

$N_2(t) = N([0,t] \times (A \setminus B))$.

On note T_1 le premier saut de N_1

T_2 ―――――――― N_2

Alors $\mathbb{P}(e_T \in B, t < T) = \mathbb{P}(t < T_1 < T_2)$

$$= \int_t^\infty du\, n(B) e^{-u n(B)} \int_u^\infty dv\, n(A \setminus B) e^{-v n(A \setminus B)}$$

$$= \int_t^\infty du\, n(B) e^{-u n(B)} e^{-u n(A \setminus B)} = \frac{n(B)}{n(A)} e^{-t n(A)}$$

$\boxtimes$

2) Formule de compensation

Thm Soit N un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson de mesure n.

Soit $H : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(s, \omega ; x) \longmapsto H(s, \omega ; x)$

$\mathcal{P}_{prév} \otimes \mathcal{B}(E)$ mesurable.

Alors $\mathbb{E}\left[\int N(dt\,de)\, H(s, \cdot ; e)\right] = \int_0^\infty ds \int_E n(dx)\, \mathbb{E}[H(s, \cdot ; x)]$.

Preuve : Par approximation, il suffit de montrer le résultat pour $H(s, \omega ; x) = K(s, \omega)\, \mathbb{1}_A(x)$ où $K \in \mathcal{P}_{prév}$

$A \in \mathcal{B}(E)$ avec $n(A) < \infty$

Dans ce cas, $\int N(ds\,de)\, K(s,\omega)\, \mathbb{1}_A(e)$

$= \int_0^\infty K(s,\omega)\, dN_s^A$ où $N_s^A = N([0,s] \times A)$ est un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson

Donc $\mathbb{E}\left[\int N(dt\,de)\, H(s, \cdot, e)\right] = n(A)\, \mathbb{E}\left[\int_0^\infty K(s,\omega)\, ds\right]$.

$\blacksquare$

Formulation alternative : On pose $E_\partial = E \cup \{\partial\}$.

Si $N(\{t\} \times E) = 1$,

on définit $e_t \in E$ comme l'élément tq $N(\{t\} \times B) = \delta_{e_t}(B)$.

Sinon on pose $e_t = \partial$.

Alors si $H : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E_\partial \to \mathbb{R}^+$ est $\mathcal{P}_{prév} \otimes \mathcal{B}(E_\partial)$ mesurable et $H(\cdot, \cdot, \partial) = 0$, alors

$$\mathbb{E}\left[\sum_{s \geq 0} H(s, \cdot, e_s)\right] = \int_0^\infty ds \int_E \mu(dx)\, \mathbb{E}[H(s, \cdot ; x)]$$

et $$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{0 \leq s \leq t} g(s, e_s)}\right] = \exp\left(-\int_0^t ds \int (1 - e^{-g(s,x)})\, n(dx)\right)$$

pour $g \geq 0$ mesurable.

Prop Soit N une v.a dans $M_p(\mathbb{R}_+ \times E)$.
N est un $(\mathcal{F}_t)$ ppP ssi

(1) $\exists (E_p)$ parties mesurables tq $E = \bigcup E_p$ et $N([0,1] \times E_p) < \infty$ p.s

(2) $N(\{0\} \times E) = 0$ et $N(\{t\} \times E) \leq 1$ $\forall t \geq 0$, p.s

(3) $\forall A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ tq $N([0,1] \times A_j) < \infty$ p.s,
le processus $(N_t(A_1), \dots, N_t(A_p))$ est $(\mathcal{F}_t)$ adapté
et à accroissements indépendants et stationnaires % $(\mathcal{F}_t)$

$\boxed{\Rightarrow}$ ok.

$\boxed{\Leftarrow}$

- Soit A tq $N([0,1] \times A) < \infty$ p.s. Alors $\forall t$, $N([0,t] \times A)$ p.s et $N([0,t] \times A)$ est un processus de Poisson. On note $n(A)$ son paramètre. $n(A)$ n est une mesure σ-finie.

soit $f \geq 0$. On vérifie que
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int N(dt\,de)\, f(t,e)\right)\right] = \exp\left(-\int_0^\infty dt \int n(de)\left(1 - e^{-f(t,e)}\right)\right)$$

On pose $B_q = \bigcup_{p=1}^{q} E_p \Rightarrow \mu(B_q) < \infty$.

On introduit $f_q(s,x) = q \wedge (f(s,x)\, \mathbb{1}_{E_q}(x)) \leq q$

$f_q(s,x) \xrightarrow[q\to\infty]{} f(s,x)$.

On pose $M_t = \exp\left(-\int \mathcal{N}(ds\,de)\, \mathbb{1}_{s\leq t}\, f_q(s,e)\right)$

$= \exp\left(-\sum_{s\leq t} f_q(s,e_s)\right)$

On a $M_t - M_0 = \sum_{s\leq t} (M_s - M_{s-})$

$= \sum_{s\leq t} -\left(1 - e^{-f_q(s,e_s)}\right) M_{s-}$

On applique la formule de compensation.

$\mathbb{E}[M_t] - 1 = -\int_0^t \int_e \mu(de)\,\left(1 - e^{-f_q(s,e)}\right) \mathbb{E}[M_{s\cancel{-}}]\, ds$

car $N([0,s]\times E_q)$ est un processus de Poisson

Soit $\phi(s) = \mathbb{E}[M_s]$.

$a(s) = \int_E \mu(dx)\,\left(1 - e^{-f_q(s,x)}\right)$.

Ainsi $\phi(t) = 1 - \int_0^t ds\, \phi(s)\, a(s)$.

On itère cette égalité :

$\phi(t) = 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}\left(-\int_0^t ds\, a(s)\right)^m + R_n(t)$

avec $R_n(t) = (-1)^{n+1} \int_{0\leq s\leq s_1\leq \dots \leq s_n\leq t} ds\, ds_1 \dots ds_n\ \phi(s)\, a(s_1) \dots a(s_n)$

or $|\phi| \leq 1$ et $|a(s)| \leq \mu(E_q)$

on a $|R_n(t)| \leq (\mu(E_q))^n\, \frac{1\, t^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \phi(t) = e^{-\int_0^t a(s)\,ds}$

On a donc $\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{0\leq s\leq t} f_q(s,e_s)}\right] = e^{-\int_0^t ds\, \mu(dx)\left(1 - e^{-f_q(s,x)}\right)}$

puis $q \to \infty$.

3) Application aux subordinateurs

Déf Un processus $(L_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est un subordinateur si

① $t \mapsto L_t$ est $\nearrow$, càd

② $\forall t, s \geq 0$ $L_{t+s} - L_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$ et $L_{t+s} - L_t \overset{(d)}{=} L_s$.

On pose $\Delta L_t = L_t - L_{t-}$

Prop $\mathcal{N} = \sum_{t ; \Delta L_t > 0} \delta_{(t, \Delta L_t)}$ est un $(\mathcal{F}_t)$ pp Poisson.

Preuve

(1) On pose $E_p =]\frac{1}{p+1}, \infty[$.

$N([0,1] \times E_p] = \sum_{s \in [0,1]} \mathbb{1}_{\{\Delta L_s > \frac{1}{p+1}\}} \leq (p+1) L_t < \infty$ p.s.

(2) ok.

(3) $(N_{t+s}(A_1) - N_s(A_1), \ldots, N_{t+s}(A_p) - N_s(A_p))$

ne dépend que de manière mesurable de

$(L_{t+s} - L_s)_{t \geq 0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$

$\overset{(d)}{=} L_s$.

On note Π la mesure d'intensité

Comme $0 \leq \sum_{s \in [0,t]} \Delta L_s \leq L_t < \infty$, on a

$\mathbb{P}(\mathcal{N}_f < \infty) = 1$ où $f(s, x) = \mathbb{1}_{s \leq t}\, x$

et $\mathcal{N}_f = \int \mathcal{N}(dt\, dx) f(s,x)$.

Donc $\int 1 \wedge f \, dt\, \Pi(dx) < \infty$. Donc $\int_0^t \int_0^\infty 1 \wedge x \, \Pi(dx) dt < \infty$

Donc $\boxed{\int_0^\infty 1 \wedge x \; \Pi(dx) < \infty.}$

Soit $V_t = L_t - \sum_{s \in [0,t]} \Delta L_s$. C'est un subordinateur continu $\Rightarrow V_t = at$ (admis)

Ainsi $L_t = at + \sum_{s \in [0,t]} \Delta L_s$.

De plus

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda W_t}] = e^{-\lambda a t}\, \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{s \in [0,t]} \lambda \Delta_s} \right]$$

$$= e^{-\lambda a t} \exp\left(- \int_0^t ds \int_0^\infty \Pi(dx) \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \right)$$

$$= e^{-t\phi(\lambda)}$$

où $\phi(\lambda) = a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \, \Pi(dx)$.