V | Excursions à durée de vie fixe

1) Propriétés de scaling

On note $C^0 = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ continues} \}$

si $w \in C^0$,
$$\zeta(w) = \inf\{ t \geq 0 ;\ w_s = 0 \text{ pour } s \geq t \}.$$

si $c > 0$, on note
$$\psi_c : C^0 \longrightarrow C^0$$
$$w \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{c}} w_{ct} \right)_{t \geq 0}.$$

Lemme 1) $\forall A \in \mathcal{E}$, on a
$$n(A) = \sqrt{c}\, n(\{ e ;\ \psi_c(e) \in A \})$$
2) $\forall F : C^0 \to \mathbb{R}^+$ mesurable,
$$n(F(e)) = \sqrt{c}\, n(F(\psi_c(e)))$$
où on note $n(F(e)) = \int_E n(de) F(e)$

Preuve Pour simplifier, on note $B^{(c)}_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$.

Alors $L_t(B^{(c)}) = \frac{1}{\sqrt{c}} L_{ct}(B)$

et $\tau_t = c\, \tau^{(c)}_{t/\sqrt{c}}$. $\quad (B_t = \sqrt{c}\, B^{(c)}_{t/c})$.

Alors
$$n(A) = \mathbb{E}\Big[\sum_{0 \leq s \leq 1} \mathbb{1}_{\tau_s \neq \tau_{s-}} \mathbb{1}_{B_{(\tau_{s-} + \cdot) \wedge \tau_s} \in A} \Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{0 \leq s \leq 1} \mathbb{1}_{\tau^{(c)}_{\frac{s}{\sqrt{c}}-} \neq \tau^{(c)}_{\frac{s}{\sqrt{c}}}} \mathbb{1}_{\sqrt{c}\, B^{(c)}_{(\tau^{(c)}_{\frac{s}{\sqrt{c}}-} + \frac{\cdot}{c}) \wedge \tau_{\frac{s}{\sqrt{c}}}} \in A} \Big]$$

$B^{(c)} \overset{(d)}{=} B$

$$\hookrightarrow = \mathbb{E}\Big[\sum_{0 \leq s \leq \frac{1}{\sqrt{c}}} \mathbb{1}_{\tau_s \neq \tau_{s-}} \mathbb{1}_{\sqrt{c}\, B_{(\tau_{s-} + \frac{\cdot}{c}) \wedge \tau_s} \in A} \Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{0 \leq s \leq \frac{1}{\sqrt{c}}} \mathbb{1}_{\tau_s \neq \tau_{s-}} \mathbb{1}_{\varphi^{(\frac{1}{c})}(e_s) \in A} \Big]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\, n(\varphi^{(\frac{1}{c})}(e) \in A).$$

Lemme $\forall c>0,\ \forall t>0,\quad n(F(\psi_c(e)) \mid \zeta > ct) = n(F(e) \mid \zeta > t)$

Preuve. On a bien $n(\zeta > ct) < \infty$.

D'après le lemme précédent,

$$\sqrt{c}\, n\left(F(\psi_c(e))\, \mathbb{1}_{\zeta(\psi_c(e)) > t}\right) = n(F(e)\, \mathbb{1}_{\zeta > t}).$$

Or $\zeta(\psi_c(e)) = \frac{1}{c}\zeta(e)$

Donc $\sqrt{c}\, n\left(F(\psi_c(e))\, \mathbb{1}_{\{\zeta(e) > ct\}}\right) = n(F(e)\, \mathbb{1}_{\zeta > t})$ ☒

2) L'excursion normalisée

Maintenant soit $\phi : C^0 \longrightarrow C^0$

$$w \mapsto \frac{1}{\sqrt{\zeta(w)}}\, w(t\zeta(w)) \quad \text{si } 0 < \zeta(w) < \infty$$

$$w \mapsto w \quad \text{sinon}$$

Lemme $\forall c, t > 0,\quad n(F(\phi(e)) \mid \zeta > ct) = n(F(\phi(e)) \mid \zeta > t)$.

Preuve : on a

$$n(F(\phi(\psi_c(e))) \mid \zeta > ct) = n(F(\phi(e)) \mid \zeta > t).$$

$$n(F(\phi(e)) \mid \zeta > ct)$$

☒

Rq : $\zeta(\phi(e)) = 1$.

On note $N_{(1)}$ la mesure image de $N(\cdot \mid \zeta > t_0)$ par ϕ, i.e $N_{(1)}(F(e)) = N(F(\phi(e)) \mid \zeta > t_0)$.

On dit que $n_{(1)}$ est la loi de l'excursion brownienne renormalisée.

Lemme Sous $n(\cdot \mid \zeta > \varepsilon)$, ζ et $\phi(e)$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et la loi de $\phi(e)$ est celle de $n_{(1)}$ et celle de ζ est $\zeta \mid \zeta > \varepsilon$.

Preuve On a $n(F(\phi(e))\, \mathbb{1}_{\zeta > t} \mid \zeta > \varepsilon)$

$$= \frac{n(F(\phi(e))\, \mathbb{1}_{\zeta>t})}{n(\zeta>\varepsilon)} \quad (\text{si } t > \varepsilon)$$

$$= n(F(\phi(e)) \mid \zeta > t) \cdot \frac{n(\zeta>t)}{n(\zeta>\varepsilon)}$$

$$= n_{(1)}(F(\phi(e)))\, n(\zeta > t \mid \zeta > \varepsilon).$$ Aussi vrai si $t < \varepsilon$.

Thm (représentation de $n_{(1)}$) Soit $t_0 > 0$.

1) Soit $T = \inf\{s \geq 0 ; \zeta(e_s) > t_0\}$.
Alors $\phi(e_T) \overset{(d)}{=} n_{(1)}$ et $\phi(e_T) \perp\!\!\!\perp T$.

2) Soit $g_{t_0} = \sup\{t < t_0 ; B_t = 0\}$, $d_{t_0} = \inf\{t > t_0 ; B_t = 0\}$.
On pose $\zeta_{t_0} = d_{t_0} - g_{t_0}$.
Alors $\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_{t_0}}} B_{(g_{t_0} + \zeta_{t_0} s) \wedge d_{t_0}} ; 0 \leq s \leq 1\right) \overset{(d)}{=} n_{(1)}$
et $\perp\!\!\!\perp \zeta_{t_0}$.

Preuve :

1) On sait que $e_T \overset{(d)}{=} n(\cdot \mid \zeta > t_0)$ et que $e_T \perp\!\!\!\perp T$, le résultat en découle.

2)

On écrit :

$$F(B_{(g_{t_0}+\cdot)\wedge d_{t_0}})\,G(d_{t_0}-g_{t_0})$$

$$= \sum_{s\geq t_0} \mathbb{1}_{\tau_{s-}<t_0<\underbrace{\tau_s}_{\tau_{s-}+\zeta(e_s)}} F(e_s)\,G(\zeta(e_s))$$

On note ν_s la loi de τ_s.

la formule de compensation donne

$$\mathbb{E}[F(\text{——})\,G(d_{t_0}-g_{t_0})]$$

$$= \int n(de)\,\mathbb{E}\left[\int_0^\infty ds\ \mathbb{1}_{\tau_{s}<t_0<\tau_{s}+\zeta(e)} F(e)\,G(\zeta(e))\right]$$

$$= \int_0^\infty ds \int_0^{t_0} \nu_s(du)\ n(F(e)\,G(\zeta(e))\,\mathbb{1}_{\zeta>t_0-u})$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_n}} B_{(g_{t_0}+\zeta_{t_0}s)\wedge d_{t_0}}\ ;0\leq s\leq 1\right) G(d_{t_0}-g_{t_0})\right]$$

$$= \int_0^\infty ds \int_0^{t_0} \nu_s(du)\ n(F(\phi(e))\,G(\zeta(e))\,|\,\zeta>t_0-u)\ n(\zeta>t_0-u)$$

$$= n_1(F(e)) \int_0^\infty ds \int_0^{t_0} \nu_s(du)\ n(G(\zeta(e))\mathbb{1}_{\zeta>t_0-u})$$

$$= n_1(F(e)) \int_0^\infty ds\ \mathbb{E}[n(G(\zeta(e))\,\mathbb{1}_{\zeta>t_0-\tau_s\geq 0}].$$

$\boxed{\S}$

3) Désintégration

Déf On note $n_{(c)}$ la loi image de $n_{(1)}$ par $\varphi_{1/c}$
$(n_{(c)}(F(e)) = n_{(1)}(F(\varphi_{1/c}(e))))$

Remarques :

- $n_{(c)}$ p.s, $\zeta = c$, $e_0 = e_{c+t} = 0$ $\forall t\geq 0$
  et $e_t > 0$ pour $0<t<c$.
- $\varphi_{1/c}$ est C^0 en c, donc $c\mapsto n_{(c)}$ est continu par la cv en loi
  (en particulier, $\forall A\in\mathcal{B}(C^0)$, $c\mapsto n_{(c)}(A)$ est mesurable
  $c\mapsto n_c(F)$ est mesurable
  $\forall F: C^0\to\mathbb{R}_+$ mesurable).

Thm (représentation d'Itô) $\forall F : C^0 \to \mathbb{R}^+$,

$$n(F(e)) = \int_0^\infty \frac{dc}{\sqrt{2\pi}\, c^{3/2}}\, n_{(c)}(F(e))$$

ou encore : $n(de) = \int_0^\infty \frac{dc}{\sqrt{2\pi}\, c^{3/2}}\, n_{(c)}(de)$

preuve : Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que $n(\cdot \mid \zeta > \varepsilon)$ p-s

$$e = \psi_{1/\zeta}(\phi(e))$$

Ainsi $n(F(e) \mid \zeta > \varepsilon) = n(F(\psi_{1/\zeta}(\phi(e))) \mid \zeta > \varepsilon)$.

Or ζ et $\phi(e)$ $\perp\!\!\!\perp$

$$= \int_\varepsilon^\infty n(\zeta \in dc \mid \zeta > \varepsilon)\, n_{(1)}(F(\psi_{1/c}(\cdot, e)))$$

$$= \int_\varepsilon^\infty \frac{n(\zeta \in dc)}{n(\zeta > \varepsilon)}\, n_{(c)}(F(e))$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, c^{3/2}}$

Ainsi, $n(F(e)\, \mathbb{1}_{\zeta > \varepsilon}) = \int_\varepsilon^\infty dc \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, c^{3/2}}\, n_{(c)}(F(e))$

On conclut en faisant $\varepsilon \to 0$.

Remarque : si $F : C^0 \to \mathbb{R}^+$ est C^0,

$$n(F(e)\, \mathbb{1}_{a < \zeta < a+\varepsilon}) = \frac{1}{\int_a^{a+\varepsilon} \frac{dc}{c^{3/2}}} \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, c^{3/2}}\, \underbrace{n_{(c)}(F(e))}_{C^0 \text{ en } c}\, dc.$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} n_{(a)}(F(e)).$$

$\Rightarrow$ On a " $n_{(a)} = n(\cdot \mid \zeta = a)$ ".