Intégration et probabilités

TD1 – Espaces mesurés – Addendum au Corrigé

Pour prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on lisait dans le corrigé :

Pour tous ouverts O, O' de $\mathbb{R}$, $O \times O'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et donc $O \times O' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en tire que $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Détaillons l'étape "On en tire que $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$".

On considère la classe G_1 définie par :

$$G_1 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ pour tout ouvert } B \text{ de } \mathbb{R}\}.$$

Il est facile de voir que G_1 est une tribu. Comme G_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$, $G_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ensuite, on considère la classe G_2 définie par :

$$G_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Il est facile de voir que G_2 est une tribu. D'après ce qu'on a fait précédemment, G_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}$, et donc $G_2 = \mathcal{B}(\mathcal{R})$.

On a donc bien $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque. Une autre manière de voir que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ consiste à dire que les deux projections $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues pour la topologie produit, donc mesurables pour la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; la tribu produit étant la plus petite tribu rendant mesurables les projections on obtient l'inclusion désirée.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.