

## Divertissements probabilistes



## 1 – Processus de Galton-Watson

Soit  $\mu = (\mu_i)_{i \geq 0}$  une mesure de probabilité sur  $\{0, 1, 2, \dots\}$  telle que  $\mu_0 + \mu_1 < 1$ . Le processus de Galton-Watson  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est définie récursivement par  $Z_0 = 1$  et, pour  $n \geq 0$  :

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où les variables aléatoires  $(X_j^{(n)})_{j, n \geq 0}$  sont i.i.d. de loi  $\mu$ . Ainsi,  $(Z_n)_{n \geq 0}$  modélise l'évolution d'une population dont à chaque instant  $n$  les individus meurent en donnant naissance à des nombres d'enfants i.i.d de loi  $\mu$ . On introduit la fonction génératrice  $\phi$  associée à  $\mu$  :

$$\phi(s) = \sum_{n \geq 0} \mu_n s^n, \quad s \in [0, 1].$$

On note finalement  $m = \phi'(1)$  la moyenne du nombre d'enfants. Le but est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème** (Probabilité d'extinction).

Presque sûrement, il existe  $n \geq 0$  tel que  $Z_n = 0$  si et seulement si  $m \leq 1$ .

- (o) Prouver que  $\phi$  est strictement croissante, que  $\phi'$  est strictement croissante et que  $\phi(1) = 1$ .
- (i) Pour  $s \in [0, 1]$ , on note  $\phi_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ . Montrer que  $\phi_{n+1} = \phi_n \circ \phi$ .
- (ii) Soit  $T = \min\{n \geq 0; Z_n = 0\}$ . Montrer que  $\mathbb{P}(T < \infty)$  est le plus petit point fixe de  $\phi$ . Conclure.



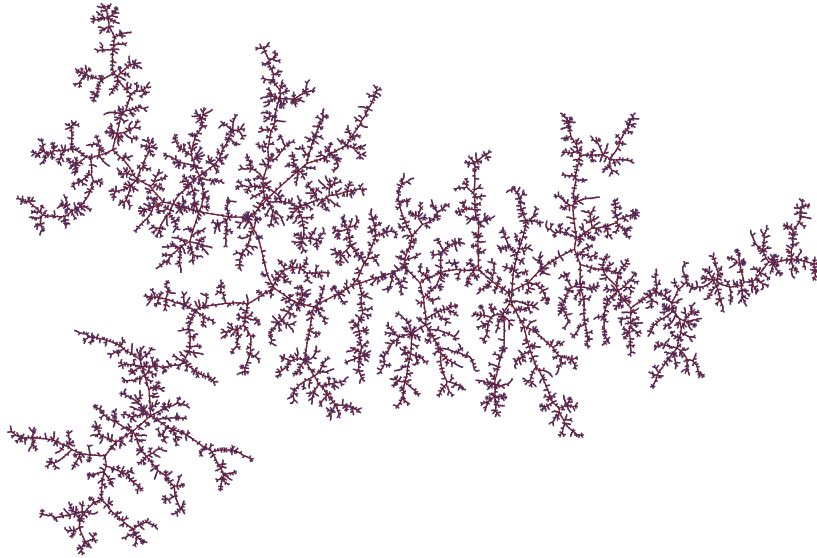


FIGURE 1 – Simulation d'un grand arbre généalogique du processus de Galton-Watson (les sommets correspondent aux individus, et deux individus sont reliés par une arête si l'un a donné naissance à l'autre).

## 2 – Percolation

On considère un graphe  $\mathcal{G}$  formé d'un ensemble (fini ou dénombrable) de sites  $\mathcal{S}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\mathcal{A}$  (une famille de couples de sites).

On définit une famille de variables aléatoires  $(\omega(a), a \in \mathcal{A})$  indépendantes<sup>1</sup>, de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ . En d'autres termes, pour chaque arête  $a$ , on tire indépendamment pile (càd 1) avec probabilité  $p$  ou face (càd 0) avec probabilité  $1 - p$ . Lorsque  $\omega(a) = 1$ , on dit que l'arête  $a$  est ouverte, et sinon fermée. On note  $P_p$  la loi correspondante.

Une réalisation de  $\omega$  définit donc un sous-graphe aléatoire de  $\mathcal{G}$  formé des sites  $\mathcal{S}$  et des arêtes ouvertes pour  $\omega$ . Souvent, on identifie la réalisation  $\omega = (\omega(a), a \in \mathcal{A})$  avec le graphe qu'elle définit.

On considère le cas du graphe  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$ .

(i) Lorsque  $d = 1$ , p.s. existe-t-il une composante connexe infinie ?

Notre but est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème** (Transition de phase pour la percolation).

Lorsque  $d \geq 2$ , il existe  $p_c = p_c(d) \in (0, 1)$  tel que :

- pour tout  $p < p_c$ ,  $\omega$  n'a presque sûrement pas de composante connexe infinie.
- pour tout  $p > p_c$ ,  $\omega$  a presque sûrement (au moins) une composante connexe infinie.

(ii) On note  $A = \{\omega \text{ a au moins une composante connexe infinie}\}$ . Montrer que  $P_p(A) = 0$  ou 1.

(ii) Montrer que  $p \mapsto P_p(A)$  est croissante.

*Indication.* On pourra définir une famille  $(X(a), a \in \mathcal{A})$  de variables aléatoires indépendantes uniformes sur  $[0, 1]$  et considérer  $\omega_p(a) = \mathbb{1}_{X(a) \leq p}$ .

1. l'espace d'états est donc  $\{0, 1\}^{\mathcal{A}}$  muni de la tribu produit.

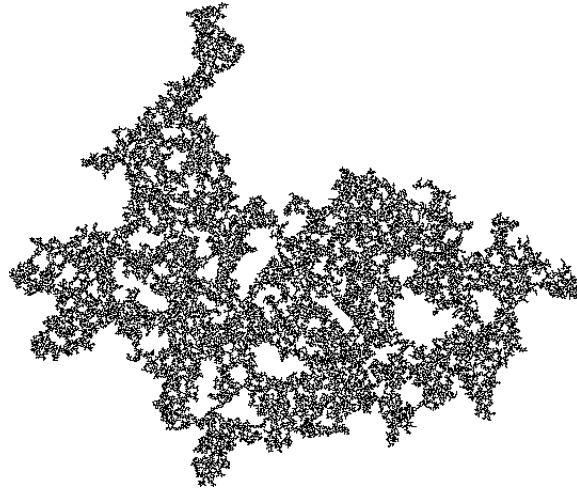


FIGURE 2 – Simulation de la composante connexe contenant l’origine dans  $\mathbb{Z}^2$  (simulation de Daniel Tiggemann).

- (iii) Montrer que pour  $p$  suffisamment petit, presque sûrement il n’existe pas de chemin ouvert de longueur infinie issue de l’origine.
- (iv) En déduire que  $p_c > 0$ .
- (v) Montrer que si  $p$  est suffisamment proche de 1 alors presque sûrement il existe un chemin ouvert de longueur infinie issue de l’origine. En déduire que  $p_c < 1$ .

*Indication.* Pour  $d = 2$ , on pourra remarquer que s’il n’existe pas de chemin ouvert de longueur infinie issue de l’origine, alors il existe un cycle “dual” fermé entourant l’origine.

- (vi) Quelle est la probabilité critique  $p_c$  pour la percolation (par arêtes) dans un arbre binaire (chaque site, sauf la racine, est relié à trois voisins, et le graphe ne comporte pas de cycle)? Pour  $p = p_c$ , existe-t-il une composante connexe infinie ?

*Petits compléments (hors TD) :*

- Montrer le théorème analogue dans le cas de la percolation par sites (et non plus sur arêtes) sur  $\mathbb{Z}^d$ .
- (~~★~~) Montrer que sur  $\mathbb{Z}^d$ , ou bien il n’y a p.s. pas de composante connexe infinie, ou bien il y a p.s. une unique composante connexe infinie.

On peut démontrer que  $p_c = 1/2$  pour la percolation par arêtes pour  $\mathbb{Z}^2$  et que sous  $P_{1/2}$  il n’y a p.s. pas de composante connexe infinie. On ne sait pas ce qu’il en est en dimension 3.

Pour davantage de détails, consulter le livre *Percolation et modèle d’Ising* de Wendelin Werner.



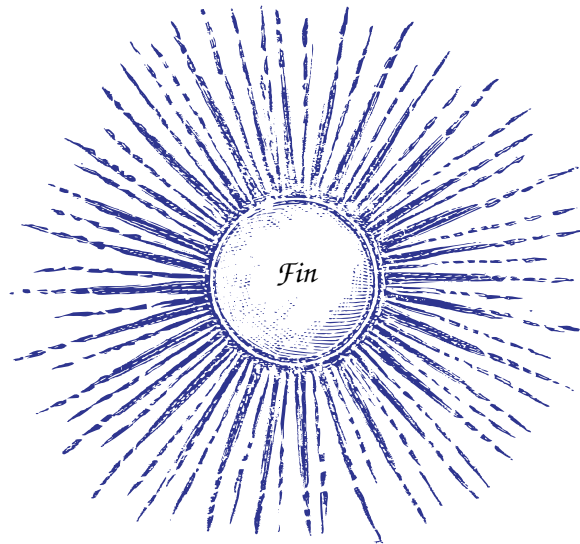
### 3 – Le capybara savant



Un capybara tape un texte aléatoirement sur son capyclavier contenant les 42 lettres de l'alphabet capybarien (en choisissant chaque nouvelle lettre uniformément au hasard, les lettres étant tapées aux instants  $1, 2, 3, \dots$ ). On note  $X_n$  la lettre tapée à l'instant  $n$ . Pour un mot <sup>2</sup>  $\mathbb{M} = m_1 m_2 \dots m_k$ , on note  $T_{\mathbb{M}}$  le premier instant où le capybara a tapé exactement le mot  $\mathbb{M}$ , c'est-à-dire :

$$T_{\mathbb{M}} = \inf\{n \geq 0; (X_{n-k+1}, X_{n-k}, \dots, X_n) = (m_1, m_2, \dots, m_k)\}.$$

On suppose que l'alphabet romain est inclus dans l'alphabet capybarien. Quelle est la probabilité de lire ABRACADABRA avant ABRACADABRI ? Qui est le plus grand entre  $\mathbb{E}[T_{ABRACADABRA}]$  et  $\mathbb{E}[T_{ABRACADABRI}]$  ?



---

2. Un mot est toujours supposé de longueur finie.