TD4 – Calculs, constructions de mesures

1 – Calculs

Exercice 1.

1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_E |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \left(\int_E f_n d\mu \right) = \int_E \left(\sum_{n\geqslant 0} f_n \right) d\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx.$$

Exercice 2. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale et l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1,$$

calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Rappel : La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) \, dx$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 3. (Partiel 2008) Étudier la convergence des suites:

$$u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt, \qquad v_n = n \int_{]0,1[} \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-x)}\right) dx.$$

Dans chacun des cas, on précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 4. Soit $\varphi : ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, dx.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 5. Soit $f : ([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[) \to ([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\, dt\,, \quad x \geqslant 0.$$

2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

2 – Constructions de mesures

Exercice 6. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\, \lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Exercice 7. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a, b[) \leqslant \nu(]a, b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ pour tout borélien A.

Exercice 8. (Fonction de répartition d'un ensemble) Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda(]-\infty, x] \cap A)$ est continue.

3 – À préparer pour la prochaine fois

Exercice 9. (Vive les espaces polonais) Soit (E, d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit μ une mesure positive sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $\mu(E) = 1$. On dit qu'elle est **tendue** si pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, il existe un compact K_ϵ tel que $\mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.

1. Prouver que si (E, d) est séparable et complet, alors toute mesure μ sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $\mu(E) = 1$ est tendue.
2. Prouver que si (E, d) est séparable et comple et si μ est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $\mu(E) = 1$, alors pour tout borélien A:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K); K \subset A, K \text{ compact}\}.$$

3. ✯ – Trouver une espace topologique $\mathcal{T}$ et une mesure μ sur $(T, \mathcal{B}(T))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

On rappelle que (E, d) est séparable s'il admet une suite (dénombrable) dense.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 10. (La fonction Γ)
Pour tout $t > 0$ on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

1. Montrer que ceci définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Indication: on pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$f_n : x \in]0,\infty[\mapsto 1_{]0,n[}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}.$$

Exercice 11. Soit $\varphi : ([0,1],\mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par

$$G(t) = \int_{[0,1]} |\varphi(x) - t|\, dx.$$

1. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est dérivable en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lambda\left(\{\varphi = t\}\right) = 0,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Exercice 12. (✮– Théorème de Lusin) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \varepsilon.$$

Fin