TD5 – Espaces L^p – Corrigé

0 – Exercice ayant été préparé

Exercice 1. (Vive les espaces polonais) Soit (E, d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit μ une mesure positive sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $\mu(E) = 1$. On dit qu'elle est **tendue** si pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, il existe un compact K_ϵ tel que $\mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.

1. Prouver que si (E, d) est séparable et complet, alors toute mesure μ sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $\mu(E) = 1$ est tendue.

2. Prouver que si (E, d) est séparable et complet et si μ est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $\mu(E) = 1$, alors pour tout borélien A:
$$\mu(A) = \sup\{\mu(K); K \subset A, K \text{ compact}\}.$$

3. ✯ – Trouver un espace topologique $\mathcal{T}$ et une mesure μ sur $(T, \mathcal{B}(T))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

On rappelle que (E, d) *est séparable s'il admet une suite (dénombrable) dense.*

Corrigé:

1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dense dans E et $\epsilon > 0$. Pour tout $p \geqslant 1$, on a
$$X = \bigcup_{n\geqslant 1} B(x_n, 1/p),$$
où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r. Comme $\mu(E) < \infty$, pour tout entier $p \geqslant 1$, il existe $n_p \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{n_p} B(x_n, 1/p)\right)^c\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2^p}.$$
On pose alors
$$K_\epsilon = \overline{\bigcap_{p\geqslant 1} \bigcup_{n\leqslant n_p} B(x_n, 1/p)}.$$

Alors $K_\epsilon \subset \bigcup_{n\leqslant n_p} \overline{B}(x_n, 1/p)$ pour tout $p \geqslant 1$, donc K_ϵ est un ensemble précompact dans l'espace complet (X, d); K_ϵ étant fermé, il est donc compact. D'autre part, la σ-additivité de μ entraîne

$$\mu\left(K_\epsilon^c\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{p\geqslant 1}\left(\bigcup_{n\leqslant n_p} B(x_n, 1/p)\right)^c\right) \leqslant \sum_{p\geqslant 1} \frac{\epsilon}{2^p} = \epsilon.$$

2. Il a été vu en cours que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F); F \subset A, F \text{ fermé}\},$$

car μ est une mesure finie sur la tribu borélienne d'un espace métrique. L'intersection d'un fermé et d'un compact étant un compact, la question 1. implique que si F est fermé,

$$\mu(F) = \sup\{\mu(K); K \subset F, K \text{ compact}\}.$$

Le résultat s'ensuit.

3. Soit X un ensemble non dénombrable, qu'on munit de la topologie co–dénombrable τ_x (les ouverts sont par définition $\emptyset$ et les sous-ensembles $B \subset X$ pour lesquels B^c est dénombrable). La tribu borélienne de X est alors constituée par les éléments B tels que B ou B^c soit dénombrable (en effet, on vérifie aisément que ces éléments forment une tribu).

   Remarquons tout de suite que si $B \subset X$ est infini, alors B n'est pas compact. En effet, soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de B, posons $A = \{a_1, a_2, \ldots,\}$ et $B_n = A^c \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors $\cup_{n\geqslant 1} B_n$ est un recouvrement ouvert de B duquel on ne peut pas extraire un recouvrement fini.

   Soit μ la mesure définie sur (X, τ_X) par:

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } B^c \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$

   Vérifions que μ est une mesure. À cet effet, considérons une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles disjoints de X et posons $B = \cup_{n\geqslant 1} B_n$. Si tous les B_n sont dénombrables, $\mu(B_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et $\mu(B) = 0$; on a bien $\mu(B) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(B_n)$. Si un des B_n est de complémentaire dénombrable, tous les autres sont dénombrables car ils sont disjoints (s'en convaincre). Dans ce cas on a bien aussi $\mu(B) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(B_n)$.

   Il est clair en revanche que μ n'est pas tendue car d'après ce qu'on a vu précédemment les compacts ont mesure nulle.

   Et si on veut une mesure de masse totale 1 non tendue sur la tribu borélienne d'un espace métrique ...? □

1 – Petites extractions

0) Donner un exemple de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Corrigé: Pour le premier exemple, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0, 1/2[$. Pour le deuxième exemple, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

□

1) Soient $p \geqslant 1$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f. Rappeler pourquoi il existe une extractrice ϕ et une fonction $h \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $(f_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge μ-p.p. vers f et $|f_{\phi(n)}| \leqslant h$ pour tout $n \geqslant 1$, μ-p.p.

Indication : Calquer la démonstration de la complétude des espaces $\mathbb{L}^p$.

Corrigé: La démonstration de la complétude des espace $\mathbb{L}^p$ est importante et est à connaître.

On se limite au cas $p < \infty$. Comme la suite (f_n) est convergente, elle est de Cauchy et on peut alors choisir une extraction $(\phi(k))_{k\geqslant 0}$ telle que

$$\|f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}\|_p \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

(par exemple, prendre $\phi(n) = \min\{k > \phi(n-1); \forall l \geqslant k, \|f_l - f_k\|_p < 2^{-n}\}$. Pour simplifier les notations, on pose $g_n = f_{\phi(n)}$.

Exactement comme dans la preuve de la complétude des espace $\mathbb{L}^p$, on montre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g_{n+1} - g_n| \in \mathbb{L}^p \tag{1}$$

Cette dernière série est donc μ-p.p. finie, autrement dit la série de terme général $g_{n+1} - g_n$ converge absolument, μ-p.p. Elle converge donc μ-p.p. On peut ainsi poser:

$$F = g_0 + \sum_{n\geqslant 0} (g_{n+1} - g_n).$$

Exactement comme dans la preuve de la complétude des espace $\mathbb{L}^p$, on montre que $g_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} F$ lorsque $n \to \infty$, Or, par hypothèse, $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} f$. Ainsi $f = F$ μ-p.p, et g_n converge bien μ-p.p. vers f.
D'autre part, on a immédiatement

$$|g_n| \leqslant |g_0| + \sum_{n\geqslant 0} |g_{n+1} - g_n|.$$

Il suffit alors de poser $h = |g_0| + \sum_{n\geqslant 0} |g_{n+1} - g_n|$, qui est dans $\mathbb{L}^p$ d'après l'inégalité de Minkowski et (1).

□

⁂

2) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ-p.p.

Corrigé: On utilise Fatou pour prouver que $g \in \mathbb{L}^p$ (ou convergence dominée avec la domination de la question précédente). D'après la question précédente, il existe une extractrice ϕ telle que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} f$, et une extractrice ψ telle que $f_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} g$. Mais $f_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} f$, et donc $f = g$ μ-p.p. □

⁂

3) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty[$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$ et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$.

Corrigé: La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$ donc il existe une fonction $f \in \mathbb{L}^q$ telle que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$. On peut extraire de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite $(f_{\phi(k)})_{k\geqslant 0}$ telle que $f_{\phi(k)} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$. Par ailleurs $f_{\phi(k)} \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $k \to \infty$. Donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{\phi(\psi(j))})_{j\geqslant 0}$ telle que $f_{\phi(\psi(j))} \to 0$ μ-p.p. quand $j \to \infty$. On en déduit donc que $f = 0$ μ-p.p. □

2 – Espaces L^p

Exercice 2. **(Continuité de l'opérateur de translation)**
Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$

$$\lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p.$$

   Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.

3. Que deviennent les résultats de la question (2.) si $p = \infty$?

4. – Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

Corrigé:

1. Pour $p = \infty$ c'est clair, et pour $p < \infty$ ceci provient du fait que l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \mapsto x - h$ est elle-même pour tout $h > 0$.

2. Soit f une fonction continue à support compact. La fonction f est donc uniformément continue. Soient $a < b$ deux réels tels que le segment $[a, b]$ contient le support de f. On a, pour tout $|h| < 1$,

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leqslant (b - a + 2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p,$$

   et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$ quand $h \to 0$ (une autre possibilité est d'utiliser le théorème de convergence dominée).

   Soit h tel que $|h| > b - a$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned} &\|\tau_h f - f\|_p^p \\ &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \\ &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(f)\}} \, dx + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(\tau_h f)\}} \, dx \\ &= \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Soient maintenant $f \in \mathbb{L}^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \geqslant 0$,

$$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \leqslant \|\tau_h f - f\|_p \leqslant \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$

c'est à dire

$$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \leqslant \|\tau_h f - f\|_p \leqslant 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

Ainsi, on a

$$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leqslant 2\varepsilon,$$

et

$$2^{1/p}\|f\|_p - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \leqslant \liminf_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leqslant \limsup_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leqslant (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p}\|f\|_p.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit les deux limites.

3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \not\to 0$ quand $h \to 0$. De même en posant $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \not\to 2^{1/p}$ quand $|h| \to \infty$.

4. Notons $A_n = A \cap B(0, n)$. Alors $\lambda(A) = \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n)$. Il existe donc $n \geqslant 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. On peut donc supposer que A est borné, de mesure strictement positive, de sorte que $f = \mathbb{1}_A$ est dans L^1. On a

$$\tau_h f - f = \mathbb{1}_{A \Delta (A+h)},$$

donc

$$\|\mathbb{1}_{A\Delta(A+h)}\|_1 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{ie} \quad \lambda(A \Delta (A+h)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, $\lambda(A \cap (A+h)^c) \to 0$ donc $\lambda(A \cap (A+h)) \to \lambda(A)$. On peut donc trouver h_0 tel que $\lambda(A \cap (A+h)) > 0$ pour tout $h \leqslant h_0$. En particulier, $A \cap (A+h) \neq \varnothing$. Donc il existe $x, y \in A$ tels que $x = y + h$ ie $h = x - y$. On a donc montré que $]-h_0, h_0[\subset A - A$. $\square$

Rappel (**Théorème d'Egoroff**). Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite fonctions qui converge μ-p.p. vers f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que la suite f_n converge uniformément vers f sur $E \setminus A_\varepsilon$.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.
3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Corrigé:

Cas $p < +\infty$.

1. D'après le lemme de Fatou on a

$$\int_E |f_n|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\mu \leqslant \sup_{n\geqslant 0} \|f_n\|_p^p < \infty,$$

   et donc $f \in \mathbb{L}^p$.

2. On fixe $r \in [1, p[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a

$$\sup_{x\in E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

   Alors pour tout $n \geqslant n_0$ on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\
&\leqslant \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon^{1-r/p} \left(\int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{r/p} \\
&\leqslant \varepsilon^r \mu(E) + 2^r \varepsilon^{1-r/p} \left(\|f\|_p^p + \sup_{n\geqslant 0} \|f_n\|_p^p \right)^{r/p}
\end{aligned}$$

□

Cas $p = +\infty$.

1. On a l'existence d'une constante $M < \infty$ telle que $\mu(|f_n| > M) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Or

$$\{f > M\} \subset \bigcup_{n\geqslant 0} \{|f_n| > M\}.$$

   Donc $\mu(|f| > M) = 0$ et $f \in \mathbb{L}^\infty$.

2. On fixe $r \in [1, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a

$$\sup_{x\in E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

   Alors pour tout $n \geqslant n_0$ on a

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\
&\leqslant \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon (2M)^r.
\end{aligned}$$

Exercice 4. **(Lemme de Scheffé)** Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Indication: considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du théorème de convergence dominée.

Corrigé: L'implication est toujours vérifiée (même sans convergeance μ-p.p.) car $|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leqslant \|f_n - f\|_p$ d'après l'inégalité triangulaire.

Pour la réciproque, comme suggéré, introduisons $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, qui est une fonction positive d'après l'inégalité triangulaire, convergeant μ-p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$. Le lemme de Fatou fournit:

$$\int (\liminf_{n\to\infty} g_n) d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu$$

Or $2^{p+1}\int |f|^p d\mu = \int (\liminf_{n\to\infty} g_n) d\mu$. Ainsi:

$$\begin{aligned} 2^{p+1}\int |f|^p d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu &= 2^p \liminf_{n\to\infty} \int (|f_n|^p + |f|^p) d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \\ &= 2^{p+1}\int |f|^p d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ lorsque $n \to \infty$ pour la dernière égalité. Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \leqslant 0,$$

ce qui conclut.

Remarque: si on oublie l'hypothèse de convergence μ-p.p., la réciproque est fausse (trouvez un contre-exemple!). $\square$

Exercice 5. **(Théorème de Lusin)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\epsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \cap K_\varepsilon^c) \leqslant \varepsilon$ et f soit continue sur K_ϵ.

Indication: on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a,b]$ sont denses dans $L^1([a,b])$.

Corrigé: Comme f est finie, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\lambda(\{|f| \geqslant n\}) < \epsilon$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O_ϵ tel que $\{|f| \geqslant n\} \subset O_\epsilon$ et $\lambda(O_\epsilon) < 2\epsilon$.

La fonction $g = f\mathbb{1}_{O_\epsilon^c}$ est bornée, donc dans $\mathbb{L}^1([a,b])$. Il existe ainsi une suite de fonctions continues f_n telles que $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} g$. Il existe une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} g$. D'après le théorème d'Egoroff, il existe un ensemble mesurable A_ϵ tel que $\lambda(A_\epsilon) \leqslant \epsilon$ et la convergence $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} g$ soit uniforme sur $[a,b]\backslash A_\epsilon$.

Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O'_ϵ tel que $A_\epsilon \subset O'_\epsilon$ et $\lambda(O'_\epsilon) < 2\epsilon$. De plus, la convergence $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} g$ est uniforme sur $[a,b]\backslash O'_\epsilon$.

Les fonctions f_n étant continues, il s'ensuit que g est continue sur $[a,b]\backslash O'_\epsilon$. Posons finalement $K_\epsilon = [a,b]\backslash(O'_\epsilon \cup O_\epsilon)$. Ainsi, la fonction f est continue sur K_ϵ, et on a $\lambda([a,b] \cap K_\varepsilon^c) \leqslant 4\varepsilon$, ce qui conclut. $\square$

3 – Théorème de Radon-Nikodym

Exercice 6. **(Contre-Exemple à R-N)** Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.

2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.

3. Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Corrigé:

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m_0(A) = 0$. Alors $A = \varnothing$ et donc $\lambda(A) = 0$.

2. Supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f dm_0 = f(x).$$

   Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction.

3. La mesure μ_0 n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas. $\square$

Exercice 7. **(Quantification de l'absolue continuité)** Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leqslant \eta \ \Rightarrow \ \nu(A) \leqslant \varepsilon.$$

   Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.

2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie. Que se passe-t-il si ν est infinie?

Corrigé:

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.

2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soient $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ tels que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mu(A_n) \leqslant 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geqslant \varepsilon$. Notons $B_n = \cup_{k\geqslant n} A_k$ pour tout $n \geqslant 1$ et $B = \cap_{n\geqslant 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\nu(B_n) \geqslant \nu(A_n) \geqslant \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geqslant \varepsilon,$$

   ce qui est contradictoire.

   ATTENTION: on ne peut pas dire que μ a une densité par rapport à ν: les mesures n'étant pas nécessairement sigma-finies, on ne peut pas utiliser le théorème de Radon-Nikodym.

   Lorsque $\nu = \infty$, il est facile de construire un contre-exemple (par exemple prendre μ et ν sur $\mathbb{R}$, μ absolument continue par rapport à ν avec une densité non intégrable, par exemple $x \to e^x$).

$\square$

Exercice 8. **(Le retour du diable)** On construit récursivement une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0$ et $f(1)=1$ comme suit. On pose $f_0(x)=x$ pour $x\in[0,1]$. On construit f_{n+1} à partir de f_n en remplaçant f_n, sur chaque intervalle maximal $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction linéaire par morceaux qui vaut $(f_n(u)+f_n(v))/2$ sur $\left[\frac{2u}{3}+\frac{v}{3},\frac{2v}{3}+\frac{u}{3}\right]$.

1. Verifier que $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant 2^{-n}$ pour tout $n\geqslant 0$ et $x\in[0,1]$. En déduire que f_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue notée $f_{\mathtt{diable}}$.

2. Soit $\mu_{\mathtt{diable}}$ la mesure sur $[0,1]$ définie comme étant la mesure de Stieljes associée à $f_{\mathtt{diable}}$. Montrer que $\mu_{\mathtt{diable}}$ est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue. La mesure $\mu_{\mathtt{diable}}$ a-t-elle des atomes?

Corrigé:

1. Voir TD 3, Exercice 1, Question 2).

2. Le support de la mesure $\mu_{\mathtt{diable}}$ est l'ensemble de Cantor triadique K_3 (voir le même exo, ainsi que le TD1), qui est de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi $\mu_{\mathtt{diable}}$ et la mesure de Lebesgue sont étrangères. Cependant, $\mu_{\mathtt{diable}}$ n'a pas d'atomes, car la fonction croissante $f_{\mathtt{diable}}$ est continue.

□

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 9.

1. Soient $p\in[1,+\infty[$ et $f\in\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$. On pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x+h)-F(x)|}{|h|^{1/q}}=0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g'\in\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p\in[1,+\infty[$, alors $g(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$.

Corrigé:

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f\in\mathbb{L}^p([0,x])\subset\mathbb{L}^1([0,x])$ donc F est bien définie. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_E f\mathbb{1}_{[x,x+h]}\,d\mu\right|\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathbb{1}_{[x,x+h]}\,d\mu\right)^{1/p}|h|^{1/q}.$$

Donc, en posant $G(x)=\int_0^x|f|^p\,d\mu$, on a

$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x+h)-F(x)|}{|h|^{1/q}}\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}(|G(x+h)-G(x)|)^{1/p}\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

car G est uniformément continue.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,dt$. D'après la question 1.,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \geqslant n$ tel que $g(x_n) > \varepsilon$. On peut trouver $h_0 \in]0, 1[$ tel que pour tout $h \leqslant h_0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon |h|^{1/q}}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [x_n, x_n + h_0]$, on a $g(t) \geqslant \varepsilon/2$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ peut-être choisie de sorte que les intervalles $[x_n, x_n + h_0]$ soient disjoints. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(t)|\,dt \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_n+h_0} |g(t)|\,dt \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon h_0}{2} = +\infty,$$

ce qui contredit l'intégrabilité de g. $\square$

Exercice 10. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Corrigé: On note $(E_k)_{k\geqslant 0}$ une suite croissante d'ensembles mesurables telle que $\mu(E_k) < \infty$ pour tout $k \geqslant 0$ et $\cup_{k\geqslant 0} E_k = E$. Supposons que $g \notin \mathbb{L}^\infty$. Alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble $\{2^n < g \leqslant 2^{n+1}\}$ est de mesure non nulle, il y a donc une infinité de n tels que pour un certain k,

$$X_{n,k} := \{2^n < g \leqslant 2^{n+1}\} \cap E_k$$

est de mesure non nulle (et finie). Soit Y_m une suite d'ensembles définie comme suit : $Y_m = X_{n_m,k_m}$ telle que la suite $(n_m)_{m\geqslant 1}$ est strictement croissante (en particulier $n_m \geqslant m$) et $\mu(Y_m) > 0$. Il est facile de vérifier que tous les Y_m sont disjoints. Posons

$$f = \sum_{m\geqslant 0} 2^{-m} (\mu(Y_m))^{-1/p} \mathbb{1}_{Y_m}.$$

Alors

$$\int_E f^p\,d\mu = \int_E \sum_{m\geqslant 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m}\,d\mu = \sum_{m\geqslant 0} 2^{-mp} < \infty,$$

et par ailleurs,

$$\int_E (fg)^p\,d\mu = \int_E \sum_{m\geqslant 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_n} g^p\,d\mu \geqslant \int_E \sum_{m\geqslant 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m} 2^{mp}\,d\mu = \sum_{m\geqslant 0} 1 = \infty.$$

On a donc construit une fonction $f \in \mathbb{L}^p$ telle que $fg \notin \mathbb{L}^p$ ce qui est impossible.

Autre approche (due à Quentin Guignard). Considérons l'application linéaire $\Phi : f \mapsto fg$ de $\mathbb{L}^p$ dans $\mathbb{L}^p$. Montrons que Φ est continue. Comme $\mathbb{L}^p$ est un espace de Banach, d'après le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que si $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} f$ et $\Phi(f_n) \xrightarrow{\mathbb{L}^p} h$, alors $h = \Phi(f)$. À cet effet, considérons une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ (ce qui implique $f_{\phi(n)}g \xrightarrow{\text{p.p.}} fg$) et $f_{\phi(n)}g = \Phi(f_{\phi(n)}) \xrightarrow{\text{p.p.}} h$. On en déduit immédiat que $fg = h$, c'est-à-dire que $h = \Phi(f)$.

Notons M la norme d'opérateur de Φ de sorte que $\|\Phi(f)\|_p \leqslant M\|f\|_p$ pour tout $f \in \mathbb{L}_p$. On suppose $M > 0$ (sinon on conclut facilement). Soit A un ensemble mesurable tel que $\mu(A) < \infty$ et appliquons l'inégalité précédente en prenant $f = \mathbb{1}_{|g| \geqslant 2M} \cdot \mathbb{1}_A$ (qui est dans $\mathbb{L}^p$ car $\mu(A) < \infty$):

$$2M\mu(\{|g| \geqslant 2M\} \cap A)^{1/p} \leqslant \|g\mathbb{1}_{|g|\geqslant 2M} \cdot \mathbb{1}_A\|_p \leqslant M\|\mathbb{1}_{|g|\geqslant 2M} \cdot \mathbb{1}_A\|_p = M\mu(\{|g| \geqslant 2M\} \cap A)^{1/p}.$$

Ainsi, $2M\mu(\{|g| \geqslant 2M\} \cap A)^{1/p} \leqslant M\mu(\{|g| \geqslant 2M\} \cap A)^{1/p}$, ce qui implique que $\mu(\{|g| \geqslant 2M\} \cap A) = 0$ et donc que $|g| \leqslant 2M$ sur A, μ-p.p. On conclut par σ–additivité.

$\square$

Fin