TD9 – Variables aléatoires, fonctions caractéristiques

Corrigé

0 – Petite question

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}$?
2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$?

Corrigé :

1. On calcule, en intégrant par parties pour $t \neq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} (1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1} e^{itx} dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(tx)dx = 2\frac{1-\cos(t)}{t^2}.$$

   Pour $t = 0$, la première intégrale vaut 1 (normal, c'est une densité de probabilité !).

2. D'après le cours, si μ est une mesure de probabilités dont la fonction caractéristique $\widehat{\mu}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ, alors μ est absolument continue par rapport à λ, et sa densité est donnée λ-p.p. par

$$x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}(t)e^{-itx}dt.$$

   On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\, 2\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-itx}.$$

   Les deux membres étant des fonctions continues en x, on a l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $x = -x$, il s'ensuit que la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$ est $x \mapsto (1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}$. □

1 – Lois de variables aléatoires

Exercice 1. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Corrigé :

1. Si $X = Y$ p.s. alors pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(f(Y)).$$

   Pour la deuxième égalité, on a utilisé le fait que l'intégrale de deux fonctions presque partout égales est la même. Ceci montre que X et Y ont la même loi.

   La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire de densité $\sqrt{2\pi}^{-1}e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Posons $Y = -X$. Alors Y est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Alors

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x)e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-x^2/2}\,dx.$$

   Donc X et Y ont la même loi mais ne sont pas égales p.s (en effet $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$ car X est une variable aléatoire à densité).

2. (a) Pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, la fonction $g \circ f$ est borélienne. Comme X et Y ont la même loi, on a

$$\mathbb{E}(g \circ f(X)) = \mathbb{E}(g \circ f(Y)),$$

   ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z = X$. Alors $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$. La loi de X^2 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac δ_0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc XZ et YZ n'ont pas la même loi. □

Exercice 2. (Simulation de variables aléatoires.) Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}.$$

   Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, et X la variable aléatoire définie par $X = -\frac{1}{p}\ln(U)$. Déterminer la loi de X.

Corrigé :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\{F^{-1}(U) \leq t\} = \{U \leq F(t)\}$. Donc

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t).$$

   Or la fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Ainsi $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\{F^{-1}(U) \le t\} = \bigcap_{n\ge 1}\{U < F(t+1/n)\}$. Donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le t)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\ge1}\left\{U < F\left(t+\frac{1}{n}\right)\right\}\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(U < F\left(t+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(t+\frac{1}{n}\right) = F(t),\end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence de la continuité à droite de F.

3. La fonction de répartition d'une variable exponentielle de paramètre p est $F(x) = 1 - e^{-px}$ pour $x \ge 0$. Ainsi, $F^{-1}(u) = -\ln(1-u)/p$. Ainsi, $-\ln(1-U)/p$ suit la loi exponentielle de paramètre p. Comme U et $1-U$ ont même loi, ceci permet de dire que $-\ln(1-U)/p$ suit la loi exponentielle de paramètre p.

   Remarque. Une autre possibilité est de calculer $\mathbb{E}\left[F(-\frac{1}{p}\ln(U))\right]$ pour toute fonction mesurable $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ en utilisant la formule du changement de variable (cf TD précédent). □

Exercice 3. **(Variables exponentielles)**

1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s, t > 0$,
$$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$
   Trouver toutes les variables aléatoires réelle positives X qui vérifient la propriété d'absence de mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Calculer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Corrigé :

1. Si X est exponentielle de paramètre λ alors $\mathbb{P}(X > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$, et la propriété d'absence de mémoire est vérifiée. Si $X = 0$ p.s. cette propriété est égalemen vérifiée.

   Réciproquement, si $\mathbb{P}(X > s) = 0$ pour tout $s > 0$, alors $X = 0$ p.s. On peut donc supposer qu'il existe $s > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > s) > 0$. La propriété d'absence de mémoire implique alors que $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$ et que la fonction $G : t \mapsto \log(\mathbb{P}(X > t))$ est additive. De plus, $G = \log(1 - F_X)$ est continue à droite, donc G est linéaire (on aurait pu aussi invoquer la décroissance en t de $\mathbb{P}(X > t)$. Et $G \le 0$. Donc il existe $\lambda \ge 0$ tel que $G(t) = -\lambda t$ pour tout $t > 0$, et donc X est exponentielle de paramètre λ.
2. On pose $N = \lfloor X \rfloor$. On a
$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(X \in [k, k+1[) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k},$$
   ce qui signifie que N suit la loi géométrique de paramètre $e^{-\lambda}$. □

2 – Fonctions caractéristiques

Notation. Si X est une variable aléatoire réelle, on notera ϕ_X sa fonction caractéristique, définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
   (a) Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
   (b) Binomiale de paramètres (n,p), avec $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$.
   (c) Géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   (d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes :
   (a) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
   (b) Uniforme sur $[0,1]$.

Corrigé :

1. Soit $s \in [0,1]$. On a
   (a) $G(s) = 1 - p + ps$,
   (b) $G(s) = (1 - p + ps)^n$,
   (c) $G(s) = \dfrac{1-p}{1-sp}$,
   (d) $G(s) = \exp(-\lambda(1-s))$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a
   (a) $\phi(t) = \dfrac{\theta}{\theta - it}$,
   (b) $\phi(t) = \dfrac{\exp(it) - 1}{it}$. □

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe C^n et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k \exp(itX)\right].$$
   En particulier :
$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right] \tag{1}$$
2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$.

   Indication. On pourra considérer $\frac{\phi_X(t)+\phi_X(-t)-2}{t^2}$.
3. Soit $k \geq 2$ entier. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$ (ici $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x) donnés par (1).
4. Faire l'exercice 8.

Corrigé :

1. Ceci provient immédiatement du théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination $\left|i^k X^k \exp(itX)\right| \leq |X|^k \in \mathbb{L}^1$ pour $1 \leq k \leq n$.

2. La fonction ϕ_X étant deux fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young garantit un développement limité à l'ordre 2 :

$$\phi_X(t) = 1 + \phi_X'(0)t + \phi_X''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

On en déduit que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_X(t)+\phi_X(-t)-2}{t^2} = \phi''(0). \tag{2}$$

Or $\phi_X(t)+\phi_X(-t) = 2\mathrm{Re}(\phi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$. Il s'ensuit par (2) que

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\phi_X''(0).$$

Or $\frac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$. Le lemme de Fatou fournit donc :

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[2\liminf_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right)\right] \leq 2\liminf_{t\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\phi_X''(0) < \infty.$$

La question 1. permet de conclure que $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$.

3. Raisonner par récurrence en adaptant la preuve de la question précédente.
4. L'exercice 8 montre qu'en général il n'est pas vrai que X admet un moment d'ordre 1 lorsque ϕ_X est dérivable en 0. □

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0,1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Corrigé :

Par continuité à droite de F on a $F(x) \in \{0,1\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}.$$

Comme $F(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$ on a $a < +\infty$. De même $a > -\infty$. Par continuité à droite de F, on a $F(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$, et donc F est la fonction de répartition de δ_a. □

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $P_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ symétrique (càd $a_k = a_{-k}$) et telle que $\sum_{k\geq 0} ka_k = \infty$. Le moment d'ordre 1 de X est-il fini ? Trouver une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que ϕ_X soit dérivable en 0. Comparer avec l'exercice 5.

Corrigé :

On calcule aisément $\mathbb{E}[|X|] = 2\sum_{k>0} ka_k = +\infty$. D'autre part :

$$\phi_X(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt).$$

Choisissons $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$ et pour $k \geq 2$:

$$a_k = a_{-k} = \frac{c}{k^2 \ln k}, \qquad \text{où } c = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}\right)^{-1},$$

de sorte que :

$$0 \leq \frac{1-\phi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}(1-\cos(tk)).$$

On vérifie ensuite que cette quantité tend vers 0 lorsque $t \to 0$ en décomposant cette dernière somme suivant que $k \geq 1/t$ ou $k < 1/t$. Tout d'abord :

$$\sum_{k \geq 1/t} \frac{1}{k^2 \ln k} \frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq -\frac{2}{t\ln(t)} \sum_{k \geq 1/t} \frac{1}{k^2} \leq -\frac{2}{t\ln(t)} \int_{\lfloor 1/t \rfloor - 1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{2}{t(\lfloor 1/t \rfloor - 1)\ln(t)} \quad \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t} \sum_{2 \leq k < 1/t} \frac{1}{k^2 \ln k} \frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq t \sum_{2 \leq k < 1/t} \frac{1}{\ln(k)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t \int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)} dx = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + \int_2^y \frac{1}{(\ln(x))^2} dx.$$

Mais lorsque $x \to \infty$, $1/(\ln x)^2 = o(1/\ln(x))$ et donc lorsque $y \to \infty$:

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)} dx = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + o\left(\int_2^y \frac{1}{\ln(x)} dx\right)$$

de sorte que

$$\int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)} dx \quad \underset{t \to 0}{\sim} \quad -\frac{1}{t\ln(t)}$$

Il s'ensuit que

$$t \int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)} dx \quad \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ceci achève de démontrer que $(1-\phi_X(t))/t \to 0$ lorsque $t \to 0$. □

Exercice 9. **(Problème des moments)** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right).$$

Calculer $\int_{\mathbb{R}+} x^k f(x) dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des v.a. X et Y de densité respectives

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad (1+\sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right)?$$

Corrigé :

Soit $n \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^n \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et le changement de variable $u = \ln(x)$ aboutit à

$$I = \int_0^\infty \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-u^2}{2} + nu\right) \sin(2\pi u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du.$$

En remarquant que $-u^2/2 + nu = -1/2(u - n/2)^2 + n^2/2$, le changement de variable $v = u - n/2$ donne

$$I = Cste. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v) \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right) dv = 0.$$

Ainsi pour $\alpha \in [-1;1]$ les moments des lois $K(2 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)$ avec

$$K^{-1} = \int_0^\infty 2 \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right) dx$$

sont égaux sans que ces lois ne soient égales. $\square$

Exercice 10. **(Pouvoir paranormal moyen)** On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

Corrigé :

1. Supposons que les cartes dans le paquet soient numérotées de 1 à 52. Le devin annonce les cartes dans un autre ordre, c'est à dire qu'il annonce une permutation de $\{1, \ldots, 52\}$. On se place donc sur $(\mathcal{S}_{52}, \mathcal{P}(\mathcal{S}_{52}), \mathbb{P} = \#/52!)$.
2. Cette formule est l'équivalent discret du résultat de l'exercice 2 question 2) du Td6. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k \geq 1} k\, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \geq 1} k\, (\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)) \\ &= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{N} k \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=2}^{N+1} (k-1) \mathbb{P}(K \geq k) \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k). \end{aligned}$$

3. Le nombre de cartes que le devin trouvera est

$$X = \max\{k : \omega(1) < \omega(2) < \ldots < \omega(k)\}.$$

Et l'on a pour $1 \leq k \leq 52$

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq 52} \mathbb{P}(\{\omega : \omega(1) = j_1, \ldots, \omega(k) = j_k\}) = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq 52} \frac{(52-k)!}{52!} = \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, il trouvera en moyenne

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{52} \frac{1}{k!} \approx e - 1$$

cartes. □

Fin