

# THÈSE

*présentée pour obtenir*

## LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

*par*

Igor Kortchemski

*Sujet :*

---

### Conditionnement de grands arbres aléatoires et configurations planes non-croisées

---

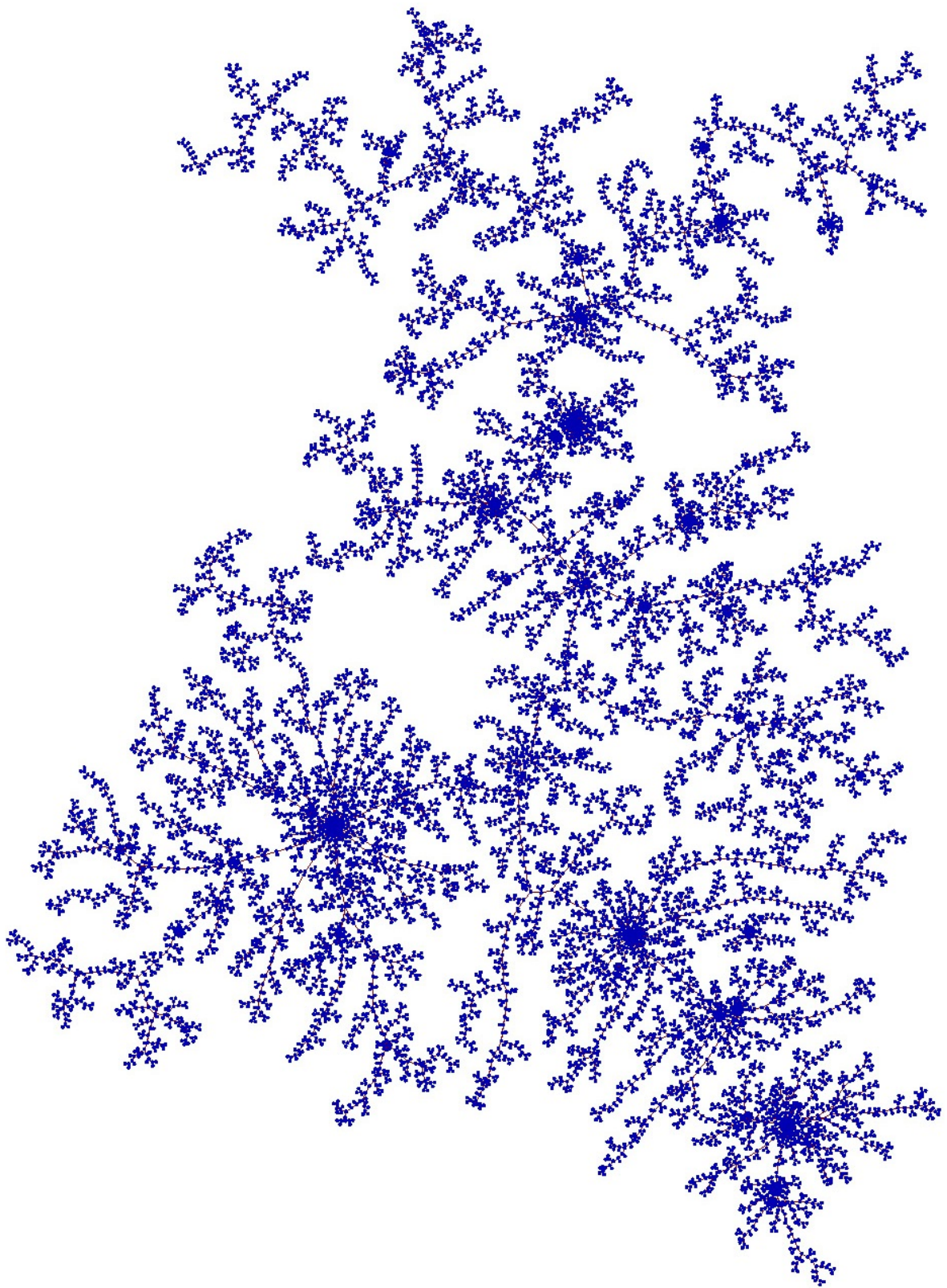
**Directeur de thèse :** M. JEAN-FRANÇOIS LE GALL

**Rapporteurs :** Mme BRIGITTE CHAUVIN  
M. ANTON WAKOLBINGER

Soutenue le 17 décembre 2012 devant la Commission d'examen :

M. RAPHAËL CERF	Université Paris-Sud	(Examineur)
M. THOMAS DUQUESNE	Université Paris 6	(Examineur)
M. JEAN-FRANÇOIS LE GALL	Université Paris-Sud	(Directeur de thèse)
M. GRÉGORY MIERMONT	ENS de Lyon	(Examineur)
M. ANTON WAKOLBINGER	Goethe-Universität	(Rapporteur)
M. MARC YOR	Université Paris 6	(Examineur)





## Remerciements



Je voudrais exprimer ma plus profonde gratitude à *Jean-François Le Gall* pour m'avoir proposé un sujet de thèse passionnant ouvrant la voie à de nombreuses directions de recherche, pour sa disponibilité, pour les discussions mathématiques toujours fructueuses, pour ses conseils toujours avisés, pour tout le temps consacré à la lecture (et re[re]lecture !) minutieuse des articles et enfin pour la liberté totale accordée durant cette thèse.

*Brigitte Chauvin* et *Anton Wakolbinger* ont accepté de rapporter cette thèse, je les en remercie et j'en suis très honoré. Je voudrais également remercier très chaleureusement *Raphaël Cerf*, *Thomas Duquesne*, *Grégory Miermont* et *Marc Yor*, dont les travaux ont eu une grande influence sur cette thèse, d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance.

À l'Université Paris-Sud, puis au DMA à l'École Normale Supérieure, j'ai pu bénéficier d'excellentes conditions de travail dans une ambiance chaleureuse et sympathique, entre goûters, pticafés et apéros informels. Un grand merci donc à tous mes collègues d'Orsay, de l'ENS et de l'ANR A3 ©. J'ai découvert des contrées lointaines notamment grâce au soutien logistique de *Jean-François Le Gall* et de l'ANR A3. Ces voyages ont été l'occasion de faire et de découvrir de belles mathématiques, au détour d'une caïpirinha, d'un mezcal ou d'un pisco sour. J'en profite pour remercier tous ceux qui se sont intéressés à mes travaux (donc également *vous*, lectrice, lecteur), qui ont répondu à mes questions et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre – un merci particulier à *Louigi Addario-Berry*, *Philippe Biane*, *Loïc Chaumont*, *Nicolas Curien*, *Thomas Duquesne* et *Grégory Miermont*. Je suis tout aussi reconnaissant à *Richard Stanley* de m'avoir fait découvrir la beauté fascinante de la combinatoire bijective avant la thèse. Un grand merci également à mon frerot mathématique *Nicolas Curien* que j'ai pu embêter dès le début de la thèse, et que j'embêterai encore après. Enfin, l'efficacité de *Catherine Ardin*, *Bénédicte Auffray*, *Valérie Blandin-Lavigne*, *Zaina Elmir* et *Laurence Vincent* a permis de faciliter les démarches administratives.

Je reste infiniment reconnaissant à mes professeurs de mathématiques non seulement pour tout ce qu'ils m'ont transmis, mais aussi pour leur soutien constant et leur dévouement pour leurs élèves. J'ai eu la chance d'avoir *Didier Missenard* comme professeur au lycée, et la préparation au Concours Général de *Thomas Lafforgue* m'a beaucoup apporté. Au lycée, la formation pour les Olympiades Internationales de Mathématiques a été très bénéfique, et je remercie chaleureusement tous ceux qui y étaient impliqués, en particulier *Pierre Bornsztein*, *Xavier Caruso*, *Claude Deschamps*, *Yann Ollivier*, *Johan Yebbou* et *Dimitri Zvonkine*. J'ai pu participer à la Clay Research Academy grâce au soutien *Martin Andler* et *Xavier Caruso* ; je les en remercie vivement. Je garde un très bon souvenir de la rigueur et la qualité de l'enseignement d'*Anne Miquel*, *Julien Cubizolles*, *Yves Duval* et *Ulrich Sauvage* en Classes Préparatoires. À l'École Normale Supérieure, j'ai eu la chance de suivre un enseignement en théorie des probabilités particulièrement stimulant grâce aux cours limpides de *Jean Bertoin* et travaux dirigés de *Mathilde Weill*. Le cours magique de *Wendelin Werner* entre « petites histoires » ©, idées et preuves, et les travaux dirigés éclairants, méticuleusement préparés, de *Marie Théret* m'ont fait prendre la route des probabilités. Je reste également profondément reconnaissant à *Wendelin Werner* pour ses conseils et son

soutien. Les différents cours spécialisés en théorie des probabilités de M2 que j'ai suivis, en particulier ceux de *Raphaël Cerf*, *Thomas Duquesne*, *Jean-François Le Gall*, *Grégory Miermont*, *Wendelin Werner* et *Marc Yor*, ont été très enrichissants et ont eu une grande influence sur mes travaux.

Je voudrais aussi témoigner toute mon amitié aux personnes avec lesquelles je me suis impliqué dans diverses activités mathématiques périscolaires destinées à des lycéennes et lycéens passionnés par les mathématiques, et qui dépensent une énergie incroyable dans ces activités bénévoles. Un grand merci à *Pierre Bertin*, *Pierre Bornsztein*, *Sandrine Caruso*, *Xavier Caruso*, *Claude Deschamps*, *Vincent Jugé*, *Bodo Lass*, *Emmanuel Lecouturier*, *François Lo Jacomo*, *Roger Mansuy*, *Irène Marcovici*, *Antoine Taveneaux*, *Johan Yebbou* pour les agréables moments passés aux stages olympiques et aux séances de correction de copies. L'organisation des tournois français et international des jeunes mathématiciennes et mathématiciens avec *Martin Andler*, *Bernardo da Costa*, *Matthieu Lequesne*, *Bruno Teheux* et *David Zmiaikou* a été une expérience formidable. Merci surtout aux élèves croisés aux stages, en TD ou ailleurs, cobayes de mes expériences pédagogiques innovantes.

Merci à tous ceux que j'ai cotoyés régulièrement pendant ces années de thèse. Un merci ineffable aux Scrouickies – *Furcy*, *Manon*, *Marion*, *Matthieu*, *Nicolas*, *Oriane*, *Pu*, *Stéphane*, *Rex & Strilou & son nez* – pour tout ce qui sert en physique (ou pas), à *Coline*, *Laure*, *Liviana*, *Fatou* et *Thibaut*. Merci *Oriane* pour la relecture de l'introduction de cette thèse. Merci *Benjamin*, *Claire*, *Fox*, *Maksym*, *Pierre* et *Steve* pour les moments partagés depuis le lycée ; merci à mes camarades préparacionnaires *Alexandre*, *Guillaume*, *Mathieu* et *Sophie* ; aux danseuses et danseurs de rock et de valse ; à *Louise* pour sa OUFFitude ; à *Camille* pour les moments magiques entre le Kaiserball et le Magyar Állami Operaház.

Cette thèse doit énormément à mes parents, qui m'ont continuellement encouragé et soutenu dans les moments de doute, à mes grands-parents qui ont toujours cru en moi, ainsi qu'à ma sœur *Sasha*, mon doudou préféré. Merci pour tout.

*Я помню чудное мгновенье:  
Передо мной явилась ты,  
Как мимолетное виденье,  
Как гений чистой красоты.*





## Résumé

LES limites d'échelle de grands arbres aléatoires jouent un rôle central dans cette thèse. Nous nous intéressons plus spécifiquement au comportement asymptotique de plusieurs fonctions codant des arbres de Galton-Watson conditionnés. Nous envisageons plusieurs types de conditionnements faisant intervenir différentes quantités telles que le nombre total de sommets ou le nombre total de feuilles, avec des lois de reproductions différentes. Lorsque la loi de reproduction est critique et appartient au domaine d'attraction d'une loi stable, un phénomène d'universalité se produit : ces arbres ressemblent à un même arbre aléatoire continu, l'arbre de Lévy stable. En revanche, lorsque la criticalité est brisée, la communauté de physique théorique a remarqué que des phénomènes de condensation peuvent survenir, ce qui signifie qu'avec grande probabilité, un sommet de l'arbre a un degré macroscopique comparable à la taille totale de l'arbre. Une partie de cette thèse consiste à mieux comprendre ce phénomène de condensation. Finalement, nous étudions des configurations non croisées aléatoires, obtenues à partir d'un polygone régulier en traçant des diagonales qui ne s'intersectent pas intérieurement, et remarquons qu'elles sont étroitement reliées à des arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un nombre de feuilles fixé. En particulier, ce lien jette un nouveau pont entre les dissections uniformes et les arbres de Galton-Watson, ce qui permet d'obtenir d'intéressantes conséquences de nature combinatoire.

## Abstract

SCALING limits of large random trees play an important role in this thesis. We are more precisely interested in the asymptotic behavior of several functions coding conditioned Galton-Watson trees. We consider several types of conditioning, involving different quantities such as the total number of vertices or leaves, as well as several types of offspring distributions. When the offspring distribution is critical and belongs to the domain of attraction of a stable law, a universality phenomenon occurs: these trees look like the same continuous random tree, the so-called stable Lévy tree. However, when the offspring distribution is not critical, the theoretical physics community has noticed that condensation phenomena may occur, meaning that with high probability there exists a unique vertex with macroscopic degree comparable to the total size of the tree. The goal of one of our contributions is to grasp a better understanding of this phenomenon. Last but not least, we study random non-crossing configurations consisting of diagonals of regular polygons, and notice that they are intimately related to Galton-Watson trees conditioned on having a fixed number of leaves. In particular, this link sheds new light on uniform dissections and allows us to obtain some interesting results of a combinatorial flavor.

# *Table des matières*



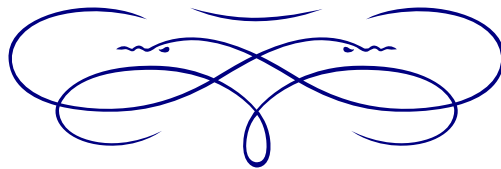
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Arbres de Galton-Watson conditionnés</b>	<b>11</b>
1.1 Arbres de Galton-Watson . . . . .	11
1.2 Grands arbres de Galton-Watson critiques conditionnés . . . . .	24
1.3 Arbres de Galton-Watson non génériques . . . . .	30
<b>2 La triangulation brownienne : thème et variations</b>	<b>37</b>
2.1 Dissections et laminations aléatoires . . . . .	37
2.2 La triangulation brownienne : une limite universelle de configurations non croisées aléatoires . . . . .	43
<b>Bibliographie</b>	<b>49</b>



# Première Partie

---

## *Introduction*



*Cette introduction est articulée autour de deux parties : nous présentons d'abord nos contributions [68, 70, 71] centrées sur les arbres aléatoires, puis celles [69, 28] portant sur des applications à l'étude des configurations planes non croisées aléatoires. Nous insistons principalement sur les techniques et idées utilisées et renvoyons le lecteur intéressé aux parties ultérieures pour les détails. Dans l'introduction, les résultats originaux contenus dans cette thèse sont encadrés.*



## Arbres de Galton-Watson conditionnés

*Arbres de la forêt, vous connaissez mon âme !  
 Au gré des envieux, la foule loue et blâme ;  
 Vous me connaissez, vous ! - vous m'avez vu souvent,  
 Seul dans vos profondeurs, regardant et rêvant.*

— Victor Hugo, *Aux arbres*

### 1.1 Arbres de Galton-Watson

Nous commençons par introduire les définitions des objets qui nous intéresseront, puis nous expliquons les techniques usuelles et les résultats connus apparaissant dans l'étude des limites locales et limites d'échelle d'arbres aléatoires, et concluons par un bref historique de cette théorie. Notre contribution à l'étude des grands arbres de Galton-Watson conditionnés est présentée en Section 1.2.

#### 1.1.1 Arbres et forêts

Nous suivons le formalisme introduit par Neveu [88] pour définir les arbres plans enracinés. Soit  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  l'ensemble des entiers naturels, et  $\mathbb{N}^* = \{1, \dots\}$ . On désigne par  $\mathcal{U}$  l'ensemble des **étiquettes** :

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où, par convention,  $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$ . Nous noterons  $<$  l'ordre lexicographique sur  $\mathcal{U}$  (par exemple  $\emptyset < 1 < 21 < 22$ ). Ainsi, un élément de  $\mathcal{U}$  est une suite  $u = u_1 \cdots u_j$  d'entiers strictement positifs. Par définition, la **génération** de  $u = u_1 \cdots u_j$ , notée  $|u|$ , est l'entier  $j$ . Lorsque  $u = u_1 \cdots u_j$  et  $v = v_1 \cdots v_k$  sont des éléments de  $\mathcal{U}$ , on note  $uv = u_1 \cdots u_j v_1 \cdots v_k$  la concaténation de  $u$  et  $v$ . En particulier, on a  $u\emptyset = \emptyset u = u$ . Finalement, un **arbre plan enraciné**  $\tau$  est un sous-ensemble (fini ou infini) de  $\mathcal{U}$  vérifiant les trois conditions suivantes :

1.  $\emptyset \in \tau$ ,
2. si  $v \in \tau$  et  $v = u_j$  pour un certain  $j \in \mathbb{N}^*$ , alors  $u \in \tau$ ,
3. pour tout  $u \in \tau$ , il existe  $k_u(\tau) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tel que, pour chaque  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_j \in \tau$  si et seulement si  $1 \leq j \leq k_u(\tau)$ .

Dans toute la suite, par **arbre** nous entendons toujours arbre plan enraciné. L'ensemble des arbres est noté  $\mathbb{T}$ . Nous visualiserons souvent les sommets d'un arbre  $\tau$  comme les individus d'une population dont  $\tau$  est l'arbre généalogique. À ce titre, pour  $u \in \tau$ , nous appellerons  $k_u(\tau)$  le **nombre d'enfants** de  $u$ . La taille totale de  $\tau$ , ou nombre total de sommets, sera noté  $\zeta(\tau) = \text{Card}(\tau)$ . Pour un arbre  $\tau$  et  $u \in \tau$ , on note  $T_u\tau = \{v \in \mathbb{U}; uv \in \tau\}$  qui est lui même un arbre. La **hauteur** de  $\tau$ , notée  $\mathcal{H}(\tau)$ , est la plus grande génération d'un sommet de  $\tau$ . Une **feuille** de  $\tau$  est un sommet  $u \in \tau$  tel que  $k_u(\tau) = 0$ . Finalement, pour  $j \geq 1$ , une **forêt** de  $j$  arbres est un élément de  $\mathbb{T}^j$ .

Insistons sur le fait que, contrairement au cadre habituel, nous autorisons ici  $\tau$  et  $k_u(\tau)$  à être infinis (cela sera en effet utile lorsque nous présenterons l'arbre de Galton-Watson critique conditionné à survivre, et serons amenés à considérer des arbres ayant un sommet de degré infini, voir la Section 1.3.1).

Nous rappelons maintenant la définition d'un arbre de Galton-Watson. Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N}$  telle que  $\rho(1) < 1$ . La loi d'un **arbre de Galton-Watson de loi de reproduction**  $\rho$  est l'unique mesure de probabilité  $\mathbb{P}_\rho$  sur  $\mathbb{T}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

1.  $\mathbb{P}_\rho[k_\emptyset = j] = \rho(j)$  pour  $j \geq 0$ ,
2. pour tout  $j \geq 1$  tel que  $\rho(j) > 0$ , conditionnellement à  $\{k_\emptyset = j\}$ , les arbres  $T_1\tau, \dots, T_j\tau$  sont i.i.d. de loi  $\mathbb{P}_\rho$ .

Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}_\rho[\tau] = \prod_{u \in \tau} \rho(k_u(\tau)). \quad (1.1)$$

Un arbre aléatoire de loi  $\mathbb{P}_\rho$  sera appelé arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\rho$ , ou plus simplement un  $\text{GW}_\rho$  arbre. Il est bien connu qu'un  $\text{GW}_\rho$  arbre est presque sûrement fini si et seulement si la moyenne de  $\rho$  est au plus 1. Lorsque la moyenne de  $\rho$  vaut exactement un, on dira que  $\rho$  (et par extension un  $\text{GW}_\rho$  arbre) est **critique**.

Pour un entier  $j \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_{\rho,j}$  est la mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^j$  qui est la loi de  $j$   $\text{GW}_\rho$  arbres indépendants.

Pour un arbre  $\tau$  et  $k \geq 0$ , on note  $Z_k(\tau) = \text{Card}\{u \in \tau; |u| = k\}$  le nombre de sommets à hauteur  $k$ . Le processus  $(Z_k(\tau), k \geq 0)$  sous  $\mathbb{P}_\rho$  est appelé processus de Bienaymé-Galton-Watson.

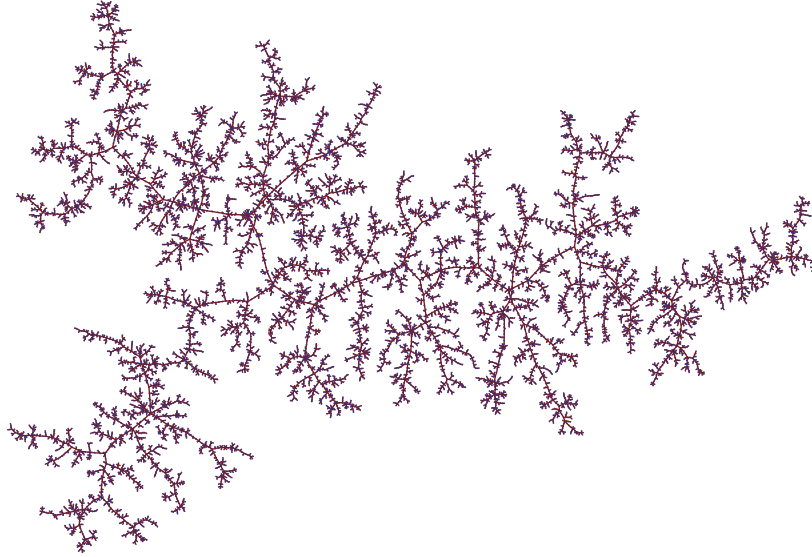
## 1.1.2 Arbres de Galton-Watson conditionnés par le nombre de sommets

Fixons une loi de reproduction  $\mu$ . Dans toute la suite de cette Section 1.1, pour chaque  $n \geq 1$  tel que  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = n] > 0$ ,  $t_n$  désigne un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir  $n$  sommets, c'est-à-dire un arbre aléatoire de loi  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \zeta(\tau) = n]$ .

Une partie de cette thèse consiste à comprendre la structure de  $t_n$  lorsque  $n$  est grand, en fonction des caractéristiques de  $\mu$ .

### Arbres aléatoires vus comme arbres de Galton-Watson conditionnés

Plusieurs classes d'arbres aléatoires à  $n$  sommets (souvent appelées « classes combinatoires ») peuvent être réalisées comme arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir  $n$  sommets pour des lois de reproduction particulières. Par exemple :



**FIGURE 1.1** – Une réalisation de  $t_{13068}$  pour une loi de reproduction critique et de variance finie.

- lorsque  $\mu$  est la loi géométrique de paramètre  $1/2$ ,  $t_n$  est uniformément distribué sur l'ensemble des arbres à  $n$  sommets,
- lorsque  $\mu(0) = 1/2$  et  $\mu(2) = 1/2$ ,  $t_n$  est uniformément distribué sur l'ensemble des arbres binaires à  $n$  sommets,
- lorsque  $\mu$  est la loi de Poisson de paramètre  $1$ ,  $t_n$  est uniformément distribué sur l'ensemble des arbres étiquetés non ordonnés à  $n$  sommets.

Nous renvoyons à [59, Section 10] pour des précisions et d'autres exemples. Mentionnons finalement que la Proposition 13 établit qu'une classe naturelle d'arbres aléatoires se réalise comme un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir un nombre de feuilles fixé (et non pas un nombre de sommets fixé, comme nous en avons l'habitude).

### Arbres simplement générés

On considère une suite  $\mathbf{w} = (w_k)_{k \geq 0}$  de réels positifs telle que  $w_0 > 0$  et telle qu'il existe  $k > 1$  avec  $w_k > 0$  (on dira que  $\mathbf{w}$  est une suite de poids). Notons  $\mathbb{T}_f$  l'ensemble des arbres finis ainsi que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{T}_n$  l'ensemble des arbres à  $n$  sommets. Pour tout  $\tau \in \mathbb{T}_f$ , on définit le poids  $w(\tau)$  de  $\tau$  par :

$$w(\tau) = \prod_{u \in \tau} w_{k_u(\tau)}.$$

On pose alors pour  $n \geq 1$  :

$$Z_n = \sum_{\tau \in \mathbb{T}_n} w(\tau).$$

Pour tout  $n \geq 1$  tel que  $Z_n \neq 0$ , soit  $\mathcal{T}_n$  un arbre aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{T}_n$  tel que pour tout  $\tau \in \mathbb{T}_n$  :

$$\mathbb{P}[\mathcal{T}_n = \tau] = \frac{w(\tau)}{Z_n}.$$

L'arbre aléatoire  $\mathcal{T}_n$  est dit **simplement généré** (cette définition remonte à Meir & Moon [83]). Compte tenu de (1.1), il apparaît que les arbres de Galton-Watson conditionnés par le nombre de sommets sont un cas particulier d'arbres simplement générés.

### Familles exponentielles

Soit  $\lambda > 0$  un paramètre fixé tel que  $Z_\lambda = \sum_{i \geq 0} \mu_i \lambda^i < \infty$ . On pose  $\mu_i^{(\lambda)} = \mu_i \lambda^i / Z_\lambda$  pour  $i \geq 0$ . En utilisant (1.1), il est aisé de voir qu'alors un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets a la même loi qu'un  $\text{GW}_{\mu^{(\lambda)}}$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. On dit que  $\mu$  et  $\mu^{(\lambda)}$  appartiennent à la même **famille exponentielle**. Ainsi, s'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $Z_\lambda < \infty$  et  $\mu^{(\lambda)}$  soit critique, alors étudier un arbre de Galton-Watson non critique conditionné revient à étudier un arbre de Galton-Watson critique conditionné (cette technique a été introduite par Kennedy [63]). Il est clair qu'on ne peut pas toujours se ramener à l'étude d'un arbre de Galton-Watson critique : le cas échéant, on dit que  $\mu$  est **non générique** (par exemple si  $\mu$  est sous-critique et le rayon de convergence de  $\sum \mu_i z^i$  vaut 1). Nous verrons que dans ce cas des phénomènes intéressants surviennent.

Finalement, en utilisant ce procédé, il est possible de montrer que si  $\mathcal{T}_n$  est un arbre simplement généré associé à la suite de poids  $\mathbf{w}$ , alors il existe une loi de reproduction  $\mu$  telle que  $\mathcal{T}_n$  a la même loi qu'un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets si et seulement si le rayon de convergence de  $\sum w_i z^i$  est strictement positif (voir [59, Section 4] pour une preuve).

### 1.1.3 Codage des arbres de Galton-Watson

L'étude des limites d'échelle d'arbres de Galton-Watson conditionnés passe par l'étude des convergences de fonctions renormalisées qui les codent. L'idée d'utiliser un codage par une fonction pour étudier des arbres aléatoires remonte à Harris [54]. L'intérêt réside dans les faits combinés que ces fonctions ont d'intéressantes propriétés probabilistes et qu'il existe de nombreuses stratégies disponibles permettant de prouver une convergence fonctionnelle. Nous allons présenter trois différentes fonctions (la marche de Lukasiewicz, la fonction de hauteur et enfin la fonction de contour) codant un même arbre, tout en présentant leurs spécificités.

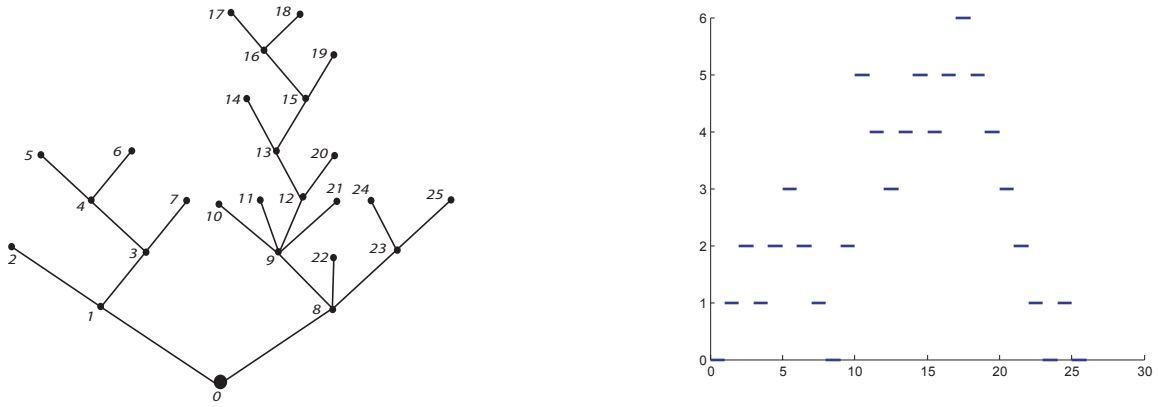
#### Codage par la marche de Lukasiewicz

Soit  $\tau$  un arbre fini, et considérons  $u(0) < u(1) < \dots < u(\zeta(\tau) - 1)$  ses sommets rangés dans l'ordre lexicographique. La **marche de Lukasiewicz**  $\mathcal{W}(\tau) = (\mathcal{W}_n(\tau), 0 \leq n \leq \zeta(\tau))$  de  $\tau$  est définie par  $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$  et, pour  $0 \leq n \leq \zeta(\tau) - 1$  :

$$\mathcal{W}_{n+1}(\tau) = \mathcal{W}_n(\tau) + k_{u(n)}(\tau) - 1.$$

Voir Fig. 1.2 pour un exemple.

Pour tout arbre  $\tau$ , il est facile de voir (par exemple par récurrence) que  $\mathcal{W}_n(\tau) \geq 0$  pour  $0 \leq n \leq \zeta(\tau) - 1$ , et que  $\mathcal{W}_{\zeta(\tau)}(\tau) = -1$ .



**FIGURE 1.2** – Un arbre  $\tau$  dont les sommets sont numérotés dans l’ordre lexicographique, et sa marche de Lukasiewicz associée. Ici  $\zeta(\tau) = 26$ .

La caractéristique cruciale de ce codage est le fait que la marche de Lukasiewicz d’un arbre de Galton-Watson se comporte comme une marche aléatoire conditionnée. Plus précisément, soit  $(W_n; n \geq 0)$  une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , issue de 0 et dont la loi des sauts est donnée par  $\nu(k) = \mu(k + 1)$  pour  $k \geq -1$ . On note  $\zeta_1 = \inf\{n \geq 0; W_n = -1\}$ . La proposition suivante peut être trouvée dans Le Gall & Le Jan [76, Corollaire 2.2] ou Bennes & Kersting [13, Proposition 2].

**Proposition 1.1.1.** *Supposons que la moyenne de  $\mu$  est au plus 1. Alors la loi de  $(W_0, W_1, \dots, W_{\zeta_1})$  coïncide avec celle de la marche de Lukasiewicz d’un  $\text{GW}_\mu$  arbre. En particulier, le nombre de sommets d’un  $\text{GW}_\mu$  arbre a la même loi que  $\zeta_1$ .*

Il est crucial de remarquer que la marche aléatoire  $(W_n)_{n \geq 1}$  est centrée si et seulement si  $\mu$  est critique.

Quand bien même le codage par la marche de Lukasiewicz d’un arbre  $\tau$  est une bijection, certaines caractéristiques naturelles de  $\tau$  ne peuvent pas lues « simplement » sur  $\mathcal{W}(\tau)$  (par exemple le nombre d’individus présents à une génération donnée). Mentionnons tout de même que des exceptions existent : par exemple, pour trouver le nombre maximal d’enfants d’un sommet de  $\tau$ , il suffit d’ajouter un au saut maximal de  $\mathcal{W}(\tau)$ .

### Marche de Lukasiewicz d’un arbre de Galton-Watson conditionné et transformée de Vervaat

Un corollaire extrêmement utile de la Proposition 1.1.1 permet d’identifier la loi de la marche de Lukasiewicz d’un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir un nombre de sommets fixé. Plus précisément, soit  $n \geq 1$  tel que  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = n] > 0$  et notons  $t_n$  un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors la loi de  $(W_0(t_n), W_1(t_n), \dots, W_n(t_n))$  coïncide avec la loi de  $(W_0, W_1, \dots, W_n)$  sous la loi conditionnelle  $\mathbb{P}[\cdot | \zeta_1 = n]$ .

En utilisant un procédé appelé transformation de Vervaat, que nous allons maintenant décrire, il est possible de se ramener à étudier la loi de  $(W_0, W_1, \dots, W_n)$  sous la loi conditionnelle plus simple  $\mathbb{P}[\cdot | W_n = -1]$ . Il n’y a plus de condition de positivité sous ce nouveau conditionnement, ce qui simplifie dans une grande mesure plusieurs points techniques. Pour définir la transformée de Vervaat, nous avons d’abord besoin d’introduire quelques notations.

Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  et  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on note  $\mathbf{x}^{(i)}$  le  $i$ -ième translaté cyclique de  $\mathbf{x}$  défini par  $x_k^{(i)} = x_{i+k \bmod n}$  pour  $1 \leq k \leq n$ . Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ . On pose  $w_j = x_1 + \dots + x_j$  pour  $1 \leq j \leq n$  et on note  $i_*(\mathbf{x})$  l'entier positif défini par  $i_*(\mathbf{x}) = \inf\{j \geq 1; w_j = \min_{1 \leq i \leq n} w_i\}$ . La **transformée de Vervaat** de  $\mathbf{x}$ , notée  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ , est par définition  $\mathbf{x}^{(i_*(\mathbf{x}))}$ . Il est également possible de définir la transformée de Vervaat d'une fonction de  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$  (voir Définition ??). La propriété évoquée au début de ce paragraphe est la suivante (il s'agit d'un fait bien connu, voir par exemple [90, Section 5]) :

**Proposition 1.1.2.** *Soit  $(W_n, n \geq 0)$  la même marche aléatoire que dans la Proposition 1.1.1 et posons  $R_k = W_k - W_{k-1}$  pour  $k \geq 1$ . Soit  $n \geq 1$  un entier tel que  $\mathbb{P}[W_n = -1] > 0$ . Alors la loi de  $\mathbf{V}(R_1, \dots, R_n)$  sous  $\mathbb{P}[\cdot | W_n = -1]$  coïncide avec la loi de  $(R_1, \dots, R_n)$  sous la loi conditionnée  $\mathbb{P}[\cdot | \zeta_1 = n]$ .*

En particulier, d'après la Proposition 1.1.1, la loi de  $\mathbf{V}(R_1, \dots, R_n)$  sous  $\mathbb{P}[\cdot | W_n = -1]$  coïncide avec la loi de  $(\mathcal{W}_1(t_n), \mathcal{W}_2(t_n) - \mathcal{W}_1(t_n), \dots, \mathcal{W}_n(t_n) - \mathcal{W}_{n-1}(t_n))$ .

### Codage par la fonction de contour

Pour définir la fonction de contour d'un arbre  $\tau$ , imaginons une particule qui explore l'arbre en partant de la racine à vitesse unité (on suppose que toutes les arêtes de l'arbre sont de longueur unité), de la façon suivante : lorsque la particule quitte un sommet  $u$ , celle-ci se dirige, si possible, vers le premier enfant de  $u$  qu'elle n'a pas encore visité, sinon elle revient au parent de  $u$ . Pour  $0 \leq t \leq 2(\zeta(\tau) - 1)$ ,  $C_t(\tau)$  est alors défini comme étant égal à la distance entre la particule et la racine de  $\tau$ . Pour des raisons techniques, on pose  $C_t(\tau) = 0$  lorsque  $t \in [2(\zeta(\tau) - 1), 2\zeta(\tau)]$ . La fonction  $C(\tau)$  est appelée **fonction de contour** de l'arbre  $\tau$  (voir Fig. 1.3 pour un exemple). Si la particule se trouve à un sommet  $u \in \tau$  à l'instant  $t \in [0, 2(\zeta(\tau) - 1)]$ , on dit que  $u$  est visité par la fonction de contour à l'instant  $u$ .



**FIGURE 1.3** – Respectivement les fonctions de contour et de hauteur de l'arbre  $\tau$  de la Fig. 1.2.

Donnons une définition plus formelle de  $C(\tau)$ . À cet effet, pour  $u, v \in \tau$ , notons  $u \wedge v$  l'ancêtre commun de plus grande génération parmi tous les ancêtres communs de  $u$  et  $v$ . Si  $l_1, \dots, l_p$  désignent les feuilles de  $\tau$ ,  $C(\tau)$  est définie comme étant la fonction affine par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ , dont les pentes sont  $-1$  ou  $+1$ , et dont les valeurs des extremas locaux sont successivement  $0, |l_1|, |l_1 \wedge l_2|, |l_2|, \dots, |l_{p-1} \wedge l_p|, |l_p|, 0$ .



Utiliser le codage par la fonction de contour présente certains avantages : certaines propriétés se lisent plus aisément sur  $C(\tau)$  que sur  $\mathcal{W}(\tau)$  (par exemple la hauteur de  $\tau$  est simplement le supremum de  $C(\tau)$ ) et nous verrons dans la section 1.1.5 qu'une convergence des fonctions de contour renormalisées implique une convergence au sens de Gromov-Hausdorff des arbres, vus comme espaces métriques compacts.

Finalement, une propriété très importante dont jouit la fonction de contour d'un arbre de Galton-Watson est celle d'invariance par retournement du temps. Plus précisément, sous  $\mathbb{P}_\mu$ , les deux fonctions  $(C_t(\tau), 0 \leq t \leq 2\zeta(\tau) - 2)$  et  $(C_{2\zeta(\tau)-2-t}(\tau), 0 \leq t \leq 2\zeta(\tau) - 2)$  ont même loi. Expliquons comment cette propriété sera appliquée. Considérons  $(B_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs divergeant vers  $+\infty$ ,  $(t_n, n \geq 1)$  une suite d'arbres aléatoires et  $C^{(n)}$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $C_t^{(n)} = \frac{1}{B_n} C_{(2\zeta(t_n)-2)t}$ .

**Proposition.** *Supposons que, pour tout  $a \in (0, 1)$ ,  $(C_t^{(n)}, 0 \leq t \leq a)$  converge en loi lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans l'espace  $\mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$ . Alors  $(C_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 1)$  converge en loi lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .*

Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que la convergence des marginales finidimensionnelles est une conséquence immédiate de l'hypothèse et que la tension au point  $a = 1$  provient de l'invariance par retournement du temps évoquée précédemment.

Cependant, la fonction de contour d'un arbre de Galton-Watson ne satisfait pas en général à la propriété de Markov (sauf dans le cas particulier d'une loi de reproduction géométrique), ce qui rend son étude complexe.

### Codage par la fonction de hauteur

La **fonction de hauteur**  $H(\tau) = (H_n(\tau), 0 \leq n < \zeta(\tau))$  est définie par  $H_n(\tau) = |\mathfrak{u}(n)|$  pour  $0 \leq n < \zeta(\tau)$ . Pour des raisons techniques, on pose  $H_k(\tau) = 0$  pour  $k \geq \zeta(\tau)$ . On prolonge alors  $H(\tau)$  à  $\mathbb{R}_+$  par interpolation linéaire en posant  $H_t(\tau) = (1 - \{t\})H_{\lfloor t \rfloor}(\tau) + \{t\}H_{\lfloor t \rfloor + 1}(\tau)$  pour  $t \geq 0$ , où  $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$  (voir Fig. 1.3 pour un exemple).

L'étude de la fonction de contour se fera par le truchement de la fonction de hauteur. En effet, d'une part il est possible d'exprimer de manière exploitable  $H(\tau)$  en fonction de  $\mathcal{W}(\tau)$ , et d'autre part  $C(\tau)$  en fonction de  $H(\tau)$ . Précisons cela. La proposition suivante, obtenue indépendamment par Le Gall & Le Jan [76, Corollary 2.2] et Bennies & Kersting [13, Section 5], exprime le fait que  $(H_0(\tau), \dots, H_n(\tau))$  est une fonction mesurable de  $(\mathcal{W}_0(\tau), \dots, \mathcal{W}_n(\tau))$  pour tout entier  $0 \leq n \leq \zeta(\tau) - 1$ .

**Proposition.** *Pour tout entier  $0 \leq n \leq \zeta(\tau) - 1$ , on a :*

$$H_n(\tau) = \text{Card} \left\{ j; 0 \leq j < n, \mathcal{W}_j(\tau) = \inf_{j \leq l \leq n} \mathcal{W}_l(\tau) \right\}. \quad (1.2)$$

Ainsi, bien que  $H(\tau)$  ne satisfasse pas en général à la propriété de Markov sous  $\mathbb{P}_\mu$ , la fonction de hauteur est intimement liée à la marche de Lukasiewicz, qui elle est markovienne.

Afin de préciser le lien entre  $H(\tau)$  et  $C(\tau)$ , il est nécessaire d'introduire quelques notations. Pour  $0 \leq p < \zeta(\tau)$ , notons  $b_p = 2p - H_p(\tau)$ , de sorte que  $b_p$  représente le premier temps d'atteinte par la fonction de contour du  $(p + 1)$ -ième sommet de  $\tau$  dans l'ordre lexicographique (en

effet, à cet instant-là la fonction de contour aura visité deux fois toutes les arêtes constituant le sous-arbre formé par les  $(p + 1)$  premiers sommets de  $\tau$ , sauf les arêtes de l'unique chemin reliant la racine au  $(p+1)$ -ième sommet, qui sont au nombre de  $H_p(\tau)$ . Posons  $b_{\zeta(\tau)} = 2(\zeta(\tau) - 1)$ . Alors pour  $0 \leq n < \zeta(\tau) - 1$  et  $t \in (b_p, b_{p+1})$  :

$$C_t(\tau) = \begin{cases} H_p(\tau) - (t - b_p) & \text{si } t \in [b_p, b_{p+1} - 1) \\ t - b_{p+1} + H_{p+1}(\tau) & \text{si } t \in [b_{p+1} - 1, b_{p+1}), \end{cases}$$

et  $C_t(\tau) = H_{\zeta(\tau)-1}(\tau) - (t - b_{\zeta(\tau)-1})$  si  $t \in [b_{\zeta(\tau)-1}, b_{\zeta(\tau)})$ .

### 1.1.4 Limites d'échelle d'arbres de Galton-Watson critiques

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique, et comme précédemment,  $t_n$  désigne un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets pour chaque  $n \geq 1$  tel que  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = n] > 0$ . Dans cette partie, nous présentons les résultats connus concernant les limites d'échelle des différentes fonctions introduites codant  $t_n$ . Avant cela, nous introduisons les différents espaces fonctionnels mis en jeu.

#### Espaces fonctionnels

Soit  $I$  un intervalle. On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts de  $I$ , qui en fait un espace polonais, c'est-à-dire un espace métrique complet et séparable. On note aussi  $\mathbb{D}(I, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues à droites et ayant des limites à gauche en tout point (càdlàg) de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la topologie  $J_1$  de Skorokhod, qui en fait un espace polonais (voir [20, chap. 3], [57, chap. VI] pour les définitions et les propriétés usuelles de la topologie de Skorokhod).

#### Variance finie : le théorème d'Aldous

Commençons par rappeler la définition de l'excursion brownienne normalisée  $(e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ . À cet effet, considérons un mouvement brownien réel  $(B_t)_{t \geq 0}$ . Notons  $g_1 = \sup\{t < 1; B_t = 0\}$  et  $d_1 = \inf\{t > 1; B_t = 0\}$ . Il est clair  $d_1 - g_1 > 0$  presque sûrement. Pour  $0 \leq t \leq 1$  on pose alors  $e_t = B_{g_1+t(d_1-g_1)}/\sqrt{d_1-g_1}$ .

Rappelons que  $\sigma^2$  désigne la variance de  $\mu$ .

**Théorème 1.1.3** (Aldous). *On suppose que  $\mu$  est critique et que  $0 < \sigma^2 < \infty$ . Alors la convergence*

$$\left( \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} C_{2nt}(t_n); 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} e.$$

a lieu en loi dans l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

Un exemple d'application intéressante de ce théorème concerne la hauteur  $\mathcal{H}(t_n)$  de  $t_n$  : en remarquant que  $H^{\text{exc}}(t_n)$  est le supremum de  $C(t_n)$ , il découle immédiatement du Théorème 1.1.3, que  $\mathcal{H}(t_n)/\sqrt{n}$  converge en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers  $\frac{2}{\sigma} \sup e$ . La fonction de répartition de  $\sup e$  est une fonction de Jacobi (voir [18]). Avec une hypothèse supplémentaire, Marckert & Mokkadem prouvent la convergence jointe suivante.

**Théorème** (Marckert & Mokkadem [79]). Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique vérifiant  $0 < \sigma^2 < \infty$ . On suppose de plus qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sum_{i \geq 0} e^{\alpha i} \mu_i < \infty$ . Alors :

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \mathcal{W}_{\lfloor nt \rfloor}(t_n), \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} H_{nt}(t_n), \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} C_{2nt}(t_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathfrak{e}_t, \mathfrak{e}_t, \mathfrak{e}_t)_{0 \leq t \leq 1}.$$

### Domaine d'attraction d'une loi stable : le théorème de Duquesne

Une généralisation substantielle du théorème d'Aldous au cas où  $\mu$  est dans le domaine d'attraction d'une loi stable a été obtenue par Duquesne. Rappelons que si  $\theta \in (1, 2]$ , on dit que  $\mu$  est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\theta$  si  $\theta = 2$  et la variance de  $\mu$  est strictement positive et finie, ou bien si  $\mu([j, \infty)) = L(j)/j^\theta$  pour  $j \geq 1$ , où  $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction telle que  $L(x) > 0$  pour  $x$  suffisamment grand et  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(tx)/L(x) = 1$  pour tout  $t > 0$  (une telle fonction est dite à **variation lente**). Dans la suite de cette partie,  $\theta \in (1, 2]$  est fixé.

Dans le cas stable, la version continue de la marche de Lukasiewicz est l'excursion normalisée d'un processus de Lévy particulier. Plus précisément, soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy strictement stable spectralement positif d'indice  $\theta$  (voir [15] pour des détails concernant les processus de Lévy). En d'autres termes,  $\mathbb{E}[\exp(-\lambda X_t)] = \exp(t\lambda^\theta)$  pour  $t \geq 0$  et  $\lambda > 0$  (lorsque  $\theta = 2$ ,  $X$  est simplement  $\sqrt{2}$  fois le mouvement brownien réel). En revanche, lorsque  $\theta \in (1, 2)$ , la version continue des fonctions de hauteur et contour est un autre processus, appelé le **processus de hauteur** d'indice  $\theta$ , que nous allons décrire (nous renvoyons à [37, Chapitre 1]) pour les détails). Pour  $0 \leq s \leq t$ , on pose  $I_s^t = \inf_{s \leq r \leq t} X_r$ . Soit  $t \geq 0$ . Si  $\theta = 2$ , on pose  $H_t = X_t - I_0^t$ . Sinon, on pose

$$H_t := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{X_s < I_s^t + \epsilon\}} ds, \quad (1.3)$$

la limite existant en probabilité. Le processus  $(H_t)_{t \geq 0}$  admet une modification continue que nous considérerons dorénavant. Donnons brièvement une motivation à cette définition. Pour  $t > 0$  notons  $\widehat{X}^{(t)}$  le processus défini par  $\widehat{X}_s^{(t)} = X_t - X_{(t-s)-}$  pour  $0 \leq s \leq t$  et posons  $\widehat{S}_s^{(t)} = \sup_{0 \leq r \leq s} \widehat{X}_r^{(t)}$ . Alors il est possible de prouver que  $H_t$  a la même loi que le temps local au temps  $t$  (convenablement normalisé) du processus  $\widehat{S}^{(t)} - \widehat{X}^{(t)}$ . Ainsi,  $H_t$  correspond intuitivement à la « mesure » de l'ensemble  $\{0 \leq s \leq t; X_s = \inf_{s \leq r \leq t} X_r\}$ , par analogie avec (1.2). Par ailleurs, les excursions de  $H$  au-dessus de 0 coïncident avec les excursions de  $X - I$  au dessus de 0.

Les excursions normalisées  $X^{\text{exc}}$  et  $H^{\text{exc}}$  sont ensuite définies à partir de  $X$  et  $H$  comme suit. Pour  $t \geq 0$ , on pose  $I_t = \inf_{[0, t]} X$ . Soient  $\underline{g}_1 = \sup\{s \leq 1; X_s = I_s\}$  et  $\zeta_1 = \inf\{s > 1; X_s = I_s\} - \underline{g}_1$ . Pour  $0 \leq t \leq 1$  on pose alors :

$$(X_t^{\text{exc}}, H_t^{\text{exc}}) = \left( \zeta_1^{-\frac{1}{\theta}} (X_{\underline{g}_1 + \zeta_1 t} - X_{\underline{g}_1}), \zeta_1^{\frac{1}{\theta} - 1} H_{\underline{g}_1 + \zeta_1 t} \right).$$

Le processus  $H^{\text{exc}}$  est appelé **excursion normalisée du processus de hauteur** d'indice  $\theta$  et vérifie p.s.  $H_0^{\text{exc}} = H_1^{\text{exc}} = 0$  et  $H_t^{\text{exc}} > 0$  pour  $t \in (0, 1)$  (voir Fig. 1.4 et ?? pour des simulations).

**Théorème 1.1.4** (Duquesne [36]). Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\theta \in (1, 2]$ . Il existe une suite de nombres réels strictement positifs  $B_n \rightarrow \infty$  telle

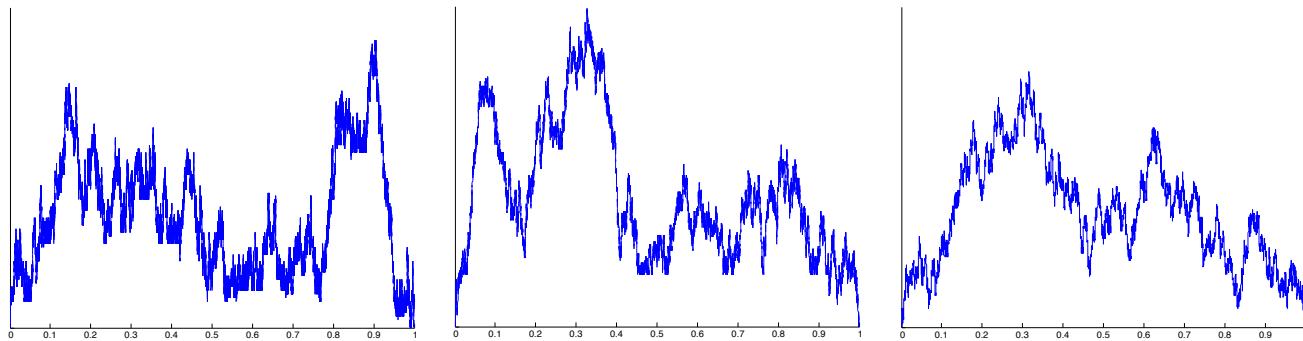


FIGURE 1.4 – Simulations de  $H^{\text{exc}}$  pour respectivement  $\theta = 1.1, 1.6$  et  $2$ .

que

$$\left( \frac{1}{B_n} \mathcal{W}_{\lfloor nt \rfloor}(t_n), \frac{B_n}{n} H_{nt}(t_n), \frac{B_n}{n} C_{2nt}(t_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (X_t^{\text{exc}}, H_t^{\text{exc}}, H_t^{\text{exc}})_{0 \leq t \leq 1}. \quad (1.4)$$

Cet énoncé mérite quelques remarques :

Il est possible d'expliciter  $B_n$  en fonction de la loi de reproduction  $\mu$ . Si  $\sigma^2$  est la variance de  $\mu$  :

$$\begin{cases} B_n = \sigma \sqrt{n/2} & \text{si } \sigma^2 < \infty, \\ B_n = |\Gamma(1 - \theta)|^{1/\theta} \inf \left\{ x \geq 0; \mu([x, \infty)) \leq \frac{1}{n} \right\} & \text{si } \sigma^2 = \infty \text{ et } \theta < 2. \end{cases}$$

Lorsque  $\sigma^2 = \infty$  et  $\theta = 2$ , la formule est légèrement plus compliquée et nous renvoyons au Théorème ?? pour un énoncé précis. Dans tous les cas, il est possible de montrer que  $(B_n/n^{1/\theta})_{n \geq 1}$  est à variation lente, de sorte que  $B_n$  est de l'ordre de  $n^{1/\theta}$ .

Lorsque  $\theta = 2$ , les deux processus  $X^{\text{exc}}$  et  $H^{\text{exc}}$  sont égaux et ont la loi de  $\sqrt{2} \cdot e$ . Ainsi, dans ce cas, les trois processus limites sont identiques. En revanche, pour  $\theta \neq 2$ ,  $H^{\text{exc}}$  n'est pas un processus markovien. Nous avons déjà signalé que Marckert & Mokkadem [79] ont démontré le résultat dans le cas  $\theta = 2$  dans le cas particulier où  $\mu$  a un moment exponentiel.

### 1.1.5 $\mathbb{R}$ -arbres compacts

Nous expliquons maintenant la construction d'arbres continus, appelés  $\mathbb{R}$ -arbres compacts, à partir d'une certaine classe de fonctions de type excursions. Par définition, un espace métrique  $(\mathcal{T}, d)$  est un  $\mathbb{R}$ -arbre si pour tous  $u, v \in \mathcal{T}$  les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Il existe une unique isométrie  $f_{u,v} : [0, d(u, v)] \rightarrow \mathcal{T}$  telle qu'on ait  $f_{u,v}(d(u, v)) = v$  et  $f_{u,v}(0) = u$ ,
- (ii) si  $q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$  est une application injective continue telle que  $q(0) = u$  et  $q(1) = v$ , alors  $q([0, 1]) = f_{u,v}([0, d(u, v)])$ .

Un  $\mathbb{R}$ -arbre enraciné est un triplet  $(\mathcal{T}, \rho, d)$  où  $(\mathcal{T}, d)$  est un  $\mathbb{R}$ -arbre  $\rho = \rho(\mathcal{T})$  est un sommet distingué appelé racine, et sera souvent simplement noté  $\mathcal{T}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur  $\rho$  et  $d$ . Dans tout ce qui suit, tous les  $\mathbb{R}$ -arbres seront compacts.

On dit que deux  $\mathbb{R}$ -arbres compacts enracinés  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont équivalents s'il existe une bijection isométrique entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  préservant la racine, et on note  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathbb{R}$ -arbres compacts enracinés.

Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue telle que  $g(0) = g(1) = 1$ . Pour  $s, t \in [0, 1]$ , on pose

$$d_g(s, t) = g(s) + g(t) - 2 \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} g(r).$$

Il est facile de voir que  $d_g$  est une pseudo-distance sur  $[0, 1]$ . On introduit alors la classe d'équivalence associée à  $d_g$  : on pose  $s \stackrel{g}{\sim} t$  si et seulement si  $d_g(s, t) = 0$  (intuitivement, on identifie les points du graphe de  $g$  qui sont en vis-à-vis), et on note  $p_g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$  la projection canonique. Si on note  $\mathcal{T}_g := [0, 1] / \stackrel{g}{\sim}$  l'espace métrique quotient, alors  $(\mathcal{T}, p_g(0), d_g)$  est un  $\mathbb{R}$ -arbre compact enraciné (voir [38, Théorème 2.1]).

Dans le cas particulier où  $g = e$ , où  $e$  est l'excursion brownienne normalisée, le  $\mathbb{R}$ -arbre  $(\mathcal{T}_e, d_e)$  est appelé arbre brownien continu (abrégé en CRT pour « Continuum Random Tree ») et a été introduit par Aldous au début des années 1990. Plus généralement, pour un paramètre  $\theta \in (1, 2]$ , l'arbre de Lévy stable de paramètre  $\theta$  est par définition le  $\mathbb{R}$ -arbre  $(\mathcal{T}_{\text{Hexc}}, d_{\text{Hexc}})$ , qui a été introduit par Duquesne & Le Gall [37].

Finalement, il est possible de munir  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$  d'une topologie, appelée topologie de Gromov-Hausdorff, qui en fait un espace polonais, ce qui fournit un cadre privilégié pour étudier des convergences au sein de cet espace. Si  $(E, \delta)$  est un espace métrique, on notera  $\delta_H$  la distance de Hausdorff usuelle entre les compacts de  $E$ . Si  $(\mathcal{T}, \rho, d)$  et  $(\mathcal{T}', \rho', d')$  sont deux  $\mathbb{R}$ -arbres compacts enracinés, on note :

$$d_{\text{GH}}((\mathcal{T}, \rho, d), (\mathcal{T}', \rho', d')) = \inf (\delta_H(\phi(\mathcal{T}), \phi(\mathcal{T}')) \vee \delta(\phi(\rho), \phi'(\rho'))),$$

où l'infimum est pris sur toutes les injections isométriques  $\phi : \mathcal{T} \rightarrow E$  et  $\phi' : \mathcal{T}' \rightarrow E$  de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  dans un même espace métrique  $(E, \delta)$  (nous renvoyons à [24] pour des précisions concernant la topologie de Gromov-Hausdorff). Il est clair que  $d_{\text{GH}}((\mathcal{T}, \rho, d), (\mathcal{T}', \rho', d'))$  ne dépend que des classes d'équivalence de  $(\mathcal{T}, \rho, d)$  et  $(\mathcal{T}', \rho', d')$  au sein de  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ . L'espace métrique  $(\mathcal{T}_{\mathbb{R}}, d_{\text{GH}})$  est alors complet et séparable [42, Théorème 1].

D'après [38, Lemme 2.3], si  $g, g' \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+)$  sont deux fonctions nulles en 0 et en 1, alors  $d_{\text{GH}}(\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_{g'}) \leq 2 \|g - g'\|_{\infty}$ . En utilisant cette propriété, il est possible de reformuler les théorèmes d'Aldous et Duquesne en termes de convergence de Gromov-Hausdorff. Plus précisément, pour un arbre  $\tau$  et  $\alpha > 0$ , notons  $(\tau, \alpha \cdot d_{g\tau})$  l'espace métrique obtenu en multipliant par  $\alpha$  les distances de graphes au sein de  $\tau$ , la racine de  $\tau$  étant un point distingué. Le Théorème 1.1.4, dont nous gardons les notations, fournit alors le corollaire suivant :

$$\left( \mathfrak{t}_n, \frac{B_n}{n} \cdot d_{g\tau} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{T}_{\text{Hexc}}, d_{\text{Hexc}}),$$

la convergence ayant lieu en loi dans l'espace  $(\mathcal{T}_{\mathbb{R}}, d_{\text{GH}})$ .

Pour conclure, signalons toutefois que la convergence au sens de Gromov-Hausdorff d'arbres n'implique pas nécessairement celle des fonctions de contour associées.

### 1.1.6 Historique et motivations

Nous concluons la partie consacrée à la présentation des objets qui nous intéressent par un bref historique présentant des travaux consacrés aux arbres de Galton-Watson conditionnés. Nous ne rentrons volontairement pas dans une description des résultats évoqués.

#### Au début furent les processus de Bienaymé-Galton-Watson

Les prémices des processus de Bienaymé-Galton-Watson remontent au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle, où ils sont introduits afin d'estimer la probabilité d'extinction de noms de familles nobles. En 1845, Bienaymé [19] affirme, sans justification mathématique, que la probabilité d'extinction vaut un si la moyenne de la loi de reproduction est inférieure à un. En 1875, Galton & Watson [98] proposent une approche fondée sur des méthodes de fonctions génératrices. Si la méthode est judicieuse, une erreur s'est glissée dans leur travail (ils concluent que la probabilité d'extinction vaut toujours 1, voir [12, Chapitre 9]), et il faut attendre 1930 pour que Steffensen [97] donne une solution complète. Nous renvoyons à [64, 12] pour une étude historique détaillée.

Dès lors, le comportement asymptotique des processus de branchement en temps grand a suscité de nombreux travaux ; nous renvoyons aux ouvrages [78, Section 12] et [11] pour un descriptif des résultats en ce sens.

#### La naissance du CRT : l'arbre brownien continu

À partir de la deuxième moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, différentes communautés se sont intéressées au comportement asymptotique d'arbres aléatoires tirés uniformément au sein d'une certaine classe ou bien conditionnés « à être grands », en étudiant certaines de leurs caractéristiques. Au frontières de la combinatoire et de l'informatique, en utilisant des méthodes de fonctions génératrices et de combinatoire analytique, diverses statistiques de ces arbres aléatoires ont été considérées, comme le degré maximal, le nombre de sommets de degré fixé ou encore le profil de l'arbre. Nous renvoyons à l'ouvrage [35] pour un traitement détaillé.

Dans le début des années 1990, au lieu de n'analyser que des propriétés spécifiques, Aldous a eu l'idée d'étudier la convergence de grands arbres aléatoires dans leur globalité. Plus précisément, Aldous [3] a expliqué comment voir des arbres aléatoires comme des sous-ensembles compacts aléatoires de l'espace  $l_1$ , et a prouvé dans ce cadre qu'un arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est une loi de Poisson de paramètre 1, conditionné à avoir  $n$  sommets, converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers un sous-ensemble compact aléatoire appelé *Continuum Random Tree*, abrégé en CRT. Un peu plus tard, Aldous [4, 5], a proposé une construction simple du CRT à partir de l'excursion brownienne normalisée  $e$ , et a démontré que la fonction de contour renormalisée d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction critique et de variance finie, conditionné à avoir  $n$  sommets, converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers  $e$ . Le CRT apparaît ainsi comme un objet limite *universel*, en ce sens que des GW arbres de lois de reproduction différentes convergent vers le même objet continu.

Dans le cas particulier où la loi de reproduction admet un moment exponentiel, Marckert & Mokkadem [79] ont étendu le résultat d'Aldous en prouvant que la marche de Lukasiewicz, les fonctions de contour et de hauteur, convenablement renormalisées, convergent conjointement vers la même excursion brownienne normalisée.

En 2003, Evans, Pitman & Winter [43] suggèrent d'utiliser le formalisme des  $\mathbb{R}$ -arbres, introduits auparavant à de fins géométriques et algébriques (voir par exemple [89]), et de la topologie de Gromov-Hausdorff, introduite par Gromov [51] pour démontrer ce qui est connu sous le nom de Théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale. Ce point de vue, consistant à voir des arbres comme espaces métriques abstraits, est maintenant largement utilisé et a permis de donner un cadre naturel et efficace pour étudier des convergences de graphes aléatoires (qui ne sont pas nécessairement codés par une fonction de type excursion). Par exemple, Haas & Miermont [53] ont démontré que plusieurs types d'arbres aléatoires non planaires, convenablement renormalisés, convergeaient lorsque leur nombre de sommets tend vers l'infini vers le CRT.

### Arbres de Lévy

Un pas important a été franchi dans la généralisation des résultats d'Aldous par Le Jan & Le Gall [76] qui ont entre autres étudié le cas où la loi de reproduction  $\mu$  est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\theta \in (1, 2]$ . Le Gall & Le Jan ont prouvé que la fonction de hauteur, convenablement renormalisée, d'une forêt de  $\text{GW}_\mu$  arbres convergeait en loi vers le processus de hauteur d'indice  $\theta$ . Ce processus a ensuite été étudié en détail par Duquesne & Le Gall dans la monographie [37] et leur a permis d'introduire les arbres de Lévy. Duquesne [36] a démontré que la fonction de contour, convenablement renormalisée, d'un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets, convergeait en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers le processus de hauteur normalisé  $H^{\text{exc}}$  d'indice  $\theta$  codant l'arbre de Lévy stable d'indice  $\theta$ . Ces travaux ont initié l'étude de nombreuses propriétés fines des arbres de Lévy, voir par exemple [38, 39, 1]

### Autres types de conditionnements

Des conditionnements faisant intervenir d'autres quantités que la taille totale ont été considérés en vue de différentes applications. Sous l'hypothèse de variance finie, l'étude asymptotique d'arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir une hauteur au moins  $n$  a été initiée par Kesten [65] et a intéressé d'autres auteurs (voir Aldous & Pitman [8], Geiger [49] et [59, Section 22.2], ce dernier ne se limitant pas à la variance finie). Le conditionnement à avoir une hauteur  $n$ , plus délicat, a été étudié dans [50, 72]. D'autres types de conditionnements faisant intervenir des degrés particuliers ont récemment fait l'objet de plusieurs travaux. Ainsi, toujours dans le cas de la variance finie, Rizzolo [94] a introduit le conditionnement à avoir un nombre fixé de sommets de degrés appartenant à un sous-ensemble fixé de  $\mathbb{N}^*$ , tandis que Broutin & Marckert [23] et Addario-Berry [2] considèrent des arbres aléatoires ayant une suite fixée de degrés.

### Arbres de Galton-Watson non génériques

L'étude des arbres de Galton-Watson conditionnés non critiques se ramenant souvent au cas critique (voir paragraphe 1.1.2), les lois de reproduction non critiques ont été longtemps délaissées, et ce n'est que très récemment que Jonsson & Steffánsson [62] ont approfondi le cas où on ne peut pas se ramener à une loi de reproduction critique, cas appelé non-générique. Jonsson & Steffánsson s'intéressent aux limites locales d'arbres de Galton-Watson non-génériques conditionnés, et d'autres travaux [60, 59] ont poursuivi cette étude.

## 1.2 Grands arbres de Galton-Watson critiques conditionnés

Une grande partie de cette thèse consiste à étudier les limites d'échelle d'arbres de Galton-Watson critiques. Notre première contribution donne une nouvelle preuve plus simple du théorème de Duquesne, et la seconde s'intéresse aux arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un (grand) nombre de feuilles fixé.

### 1.2.1 Une nouvelle preuve du théorème de Duquesne

Le Gall [72] a récemment donné une preuve alternative du théorème d'Aldous en utilisant une propriété d'absolue continuité entre deux mesures d'Itô conditionnées. Dans cette partie, nous expliquons comment ces idées peuvent être généralisées au cas où  $\mu$  est dans le domaine d'attraction d'une loi stable, ce qui permet de donner une preuve plus simple du théorème de Duquesne. Nous présenterons les idées mises en jeu en détail, car elles seront cruciales dans l'étude du conditionnement par un nombre de feuilles fixé. Nous renvoyons au chapitre ?? pour les détails.

Un rôle clé est joué par la mesure d'Itô, que nous commençons par introduire rapidement.

#### Mesure d'Itô

Notons  $I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$  pour  $t \geq 0$ . Le processus  $X - I$  vérifie la propriété de Markov forte, et 0 est régulier vis-à-vis de lui-même pour ce processus. On peut donc choisir  $-I$  comme temps local pour  $X - I$  au niveau 0 (comme  $X$  est spectralement positif, le processus  $-I$  est continu). Notons  $(g_i, d_i), i \in \mathcal{J}$  les excursions de  $X - I$  au-dessus de 0. Pour tous  $i \in \mathcal{J}$  et  $s \geq 0$ , on pose  $\omega_s^i = X_{(g_i+s) \wedge d_i} - X_{g_i}$ , qui est un élément de l'espace des excursions  $\mathcal{E}$  défini par

$$\mathcal{E} = \{\omega \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+); \omega(0) = 0 \text{ et } \zeta(\omega) := \sup\{s > 0; \omega(s) > 0\} \in (0, \infty)\}.$$

Pour  $\omega \in \mathcal{E}$ , on appelle  $\zeta(\omega)$  la durée de vie de l'excursion  $\omega$ . D'après la théorie des excursions, la mesure ponctuelle

$$\mathbf{N}(d\omega) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \delta_{(-I_{g_i}, \omega^i)}$$

est une mesure de Poisson d'intensité  $d\mathbf{N}(d\omega)$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}$ , où  $\mathbf{N}(d\omega)$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{E}$  appelée **mesure d'Itô**.

L'expression de la transformée de Laplace de  $X$  indique une invariance par changement d'échelle : pour tout  $c > 0$ , le processus  $(c^{-1/\theta}X_{ct}, t \geq 0)$  a la même loi que  $X$ . Ceci va permettre de donner un sens à la mesure conditionnée  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1)$  (l'événement  $\{\zeta = 1\}$  étant de mesure d'Itô nulle, le conditionnement considéré n'a pas de sens *a priori*). En effet, pour  $\lambda > 0$ , soit  $S^{(\lambda)}$  l'opérateur de changement d'échelle défini sur  $\mathcal{E}$  par  $S^{(\lambda)}(\omega) = (\lambda^{1/\theta}\omega(s/\lambda), s \geq 0)$ . La propriété d'invariance par changement d'échelle de  $X$  garantit que l'image de la mesure  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta > t)$  par  $S^{(1/\zeta)}$  ne dépend pas de  $t > 0$ . Cette loi, à support sur l'ensemble des excursions de durée de vie unité, est notée  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1)$ . Intuitivement, il s'agit de la loi d'une excursion sous la mesure d'Itô conditionnée à avoir une durée de vie unité.

En utilisant la formule d'approximation (1.3), il est également possible de définir le processus de hauteur  $H$  sous  $\mathbf{N}$  ainsi que sous  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1)$  (voir [36]). La loi de  $(X, H)$  sous  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1)$  coïncide avec la loi de  $(X^{\text{exc}}, H^{\text{exc}})$  définie dans la Section 1.1.4 (voir [25, 36]).



On rappelle que  $(W_n; n \geq 0)$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , issue de 0 et dont la loi des sauts est donnée par  $\nu(k) = \mu(k+1)$  pour  $k \geq -1$ . On rappelle également la notation  $\zeta_1 = \inf\{n \geq 0; W_n = -1\}$ . Suivant (1.2), on pose pour  $n \geq 0$  :

$$H_n^W = \text{Card} \left\{ j; 0 \leq j < n, W_j = \inf_{j \leq l \leq n} W_l \right\}.$$

Pour simplifier l'exposition, nous allons d'abord expliquer comment prouver la convergence de la première composante dans (1.4), puis celle de la seconde.

### Convergence de la marche de Lukasiewicz renormalisée : transformée de Vervaat

Compte tenu de la Proposition 1.1.1, la convergence de la première composante dans (1.4) est équivalente à

$$\left( \left( \frac{1}{B_n} W_{\lfloor nt \rfloor} \right)_{0 \leq t \leq 1} \middle| \zeta_1 = n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (X_t)_{0 \leq t \leq 1} \text{ sous } \mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1).$$

Nous suivons l'approche de Duquesne [36] pour prouver cette convergence qui est maintenant standard, et renvoyons à [36] pour les détails. En utilisant un argument d'absolue continuité entre la loi de  $(W_0, \dots, W_{\lfloor na \rfloor})$  sous  $\mathbb{P}[\cdot | W_n = -1]$  et  $(W_0, \dots, W_{\lfloor na \rfloor})$  valable pour tout  $a \in (0, 1)$ , puis un argument de retournement du temps, on prouve la convergence

$$\left( \left( \frac{1}{B_n} W_{\lfloor nt \rfloor} \right)_{0 \leq t \leq 1} \middle| W_n = -1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (X_t^{\text{br}})_{0 \leq t \leq 1},$$

où  $X^{\text{br}}$  désigne le pont de Lévy stable d'indice  $\theta$ , qui peut être informellement vu comme le processus  $X$  conditionné par  $X_1 = 0$ . On conclut en prenant la transformée de Vervaat, combinant la Proposition 1.1.2 avec le fait que la transformée de Vervaat de  $X^{\text{br}}$  est  $X^{\text{exc}}$ .

### Convergence de la fonction de hauteur renormalisée : d'un théorème limite inconditionnel vers un théorème limite conditionnel

Expliquons maintenant comment prouver la convergence de la seconde composante dans (1.4), chose bien plus délicate. D'après la Proposition 1.1.1, celle-ci est équivalente à

$$\left( \left( \frac{B_n}{n} H_{nt}^W \right)_{0 \leq t \leq 1} \middle| \zeta_1 = n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (H_t)_{0 \leq t \leq 1} \text{ sous } \mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1). \quad (1.5)$$

**Étape préliminaire : théorème limite inconditionnel.** On part d'un théorème limite sans conditionnement dû à Duquesne & Le Gall [37] :

$$\left( \frac{1}{B_n} W_{\lfloor nt \rfloor}, \frac{B_n}{n} H_{nt}^W \right)_{t \geq 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (X_t, H_t)_{t \geq 0}. \quad (1.6)$$

La convergence de la première composante est une simple généralisation au cas stable du théorème d'invariance de Donsker, mais obtenir la convergence du couple est plus délicat.

**Étape 1 : théorème limite conditionné par un événement de mesure d'Itô non nulle.** Soit  $A \subset \mathcal{E}$  un sous-ensemble mesurable d'excursions tel que  $\mathbf{N}(A) > 0$ . D'après le théorème de représentation de Skorokhod, nous pouvons supposer que la convergence (1.6) a lieu presque sûrement (la marche aléatoire  $W$  apparaissant dans (1.6) dépendrait alors de  $n$ ). Pour simplifier les notations, soit  $H^{(n)}$  le processus défini par  $H_t^{(n)} = \frac{B_n}{n} H_{nt}^W$  pour  $t \geq 0$ . Notons  $H^{(n,A)}$  la première excursion de  $H^{(n)}$  au-dessus de 0 appartenant à  $A$ , ainsi que  $H^{(A)}$  la première excursion de  $H$  au-dessus de 0 appartenant à  $A$ . Il est naturel de s'attendre à ce que  $H^{(n,A)} \rightarrow H^{(A)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Supposons un instant que cette dernière convergence ait lieu. Alors  $H^{(n,A)}$  a la loi de la fonction de hauteur normalisée d'un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionnée à être dans  $A$ , et, d'après les propriétés des mesures ponctuelles de Poisson,  $H^{(A)}$  suit la loi conditionnelle  $\mathbf{N}(\cdot | A)$ . Ainsi, sous l'hypothèse  $\mathbf{Hyp}_A : H^{(n,A)} \rightarrow H^{(A)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , nous obtenons :

$$(H^{(n)} | H^{(n)} \in A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} H \text{ sous } \mathbf{N}(\cdot | A). \quad (1.7)$$

Duquesne & Le Gall [37, Section 2.5] ont prouvé que  $\mathbf{Hyp}_A$  est vérifiée lorsqu'on prend  $A = \{\omega ; \zeta(\omega) > 1\}$ , et Le Gall [72, Théorème 5.1] a démontré que, lorsque la variance de  $\mu$  est finie,  $\mathbf{Hyp}_A$  est vérifiée dès que  $A$  est ouvert et que  $\mathbf{N}(\{\omega \in \mathcal{E} ; d(\omega, A) < \epsilon\}) \rightarrow \mathbf{N}(A)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . En particulier, en prenant  $A = \{\omega ; \zeta(\omega) > 1\}$ , nous obtenons la convergence :

$$\left( \left( \frac{B_n}{n} H_{nt}^W \right)_{t \geq 0} \middle| \zeta_1 \geq n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (H_t)_{t \geq 0} \text{ sous } \mathbf{N}(\cdot | \zeta > 1).$$

Par ailleurs, en utilisant le fait les excursions de  $W$  au-dessus de son minimum courant coïncident avec les excursions de  $H$  au-dessus de 0, il n'est pas difficile d'obtenir la convergence jointe suivante (voir [37, Section 2.5] et [72] pour les détails) :

$$\left( \left( \frac{1}{B_n} W_{\lfloor nt \rfloor}, \frac{B_n}{n} H_{nt}^W \right)_{t \geq 0} \middle| \zeta_1 \geq n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} ((X_t, H_t)_{t \geq 0} | \zeta > 1). \quad (1.8)$$

**Étape 2 : théorème limite conditionné par un événement de mesure d'Itô nulle.** Comme l'ensemble d'excursions  $A = \{\omega ; \zeta(\omega) = 1\}$  est de  $\mathbf{N}$  mesure nulle, il n'est pas possible d'utiliser (1.7) afin d'obtenir (1.5). Un autre argument est ainsi nécessaire. L'idée originelle de Duquesne consistait à utiliser une transformée de Vervaat pour les fonctions de hauteur et contour. Nous présentons une autre approche, qui, dans le cas de la variance finie, est due à Le Gall [72], et repose sur une relation d'absolue continuité entre  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1)$  et  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta > 1)$ .

On commence par établir que pour tout  $a \in (0, 1)$ ,

$$\left( \left( \frac{B_n}{n} H_{\lfloor nt \rfloor}^W \right)_{0 \leq t \leq a} \middle| \zeta_1 = n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (H_t)_{0 \leq t \leq a} \text{ sous } \mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1). \quad (1.9)$$

On fixe  $F : \mathbb{D}([0, a], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue bornée. En utilisant la propriété de Markov de  $W$  au temps  $\lfloor na \rfloor$ , on montre qu'il existe une fonction  $D_n^{(a)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\mathbb{E} \left[ F \left( \frac{B_n}{n} H_{\lfloor nt \rfloor}^W ; 0 \leq t \leq a \right) \middle| \zeta_1 = n \right] = \mathbb{E} \left[ F \left( \frac{B_n}{n} H_{\lfloor nt \rfloor}^W ; 0 \leq t \leq a \right) D_n^{(a)}(W_{\lfloor nt \rfloor}) \middle| \zeta_1 \geq n \right].$$

L'utilisation d'une relation d'absolue continuité entre les lois conditionnelles  $\mathbb{P}[\cdot | \zeta_1 = n]$  et  $\mathbb{P}[\cdot | \zeta_1 \geq n]$  remonte à Le Gall & Miermont [75]. Des estimées techniques établissent ensuite l'existence d'une application  $\Gamma_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $D_n^{(\alpha)}(j)$  est de l'ordre de  $\Gamma_\alpha(j/B_n)$  pour une certaine plage de valeurs de  $j$ . Par ailleurs, des propriétés de la mesure d'Itô donnent la relation d'absolue continuité suivante :

**Proposition 1.**

Pour  $s > 0$ , notons  $p_s$  la densité de  $X_s$ . Pour  $s, x > 0$  posons  $q_s(x) = \frac{x}{s} p_s(-x)$  et  $\Gamma_\alpha(x) = \theta q_{1-\alpha}(x) / \int_{1-\alpha}^\infty ds q_s(x)$ . Alors :

$$\mathbf{N}(F((H_t)_{0 \leq t \leq \alpha}) \Gamma_\alpha(X_\alpha) | \zeta > 1) = \mathbf{N}(F((H_t)_{0 \leq t \leq \alpha}) | \zeta = 1).$$

Ainsi, en utilisant (1.8), il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu \left[ F \left( \frac{B_n}{n} H_{[nt]}^W ; 0 \leq t \leq \alpha \right) \middle| \zeta_1 = n \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ F \left( \frac{B_n}{n} H_{[nt]}^W ; 0 \leq t \leq \alpha \right) D_n^{(\alpha)}(W_{[an]}) \middle| \zeta_1 \geq n \right] \\ = \mathbf{N}(F(H_t ; 0 \leq t \leq \alpha) \Gamma_\alpha(X_\alpha) | \zeta > 1) \\ = \mathbf{N}(F(H_t ; 0 \leq t \leq \alpha) | \zeta = 1). \end{aligned}$$

Pour conclure, on montre que (1.9) a également lieu pour  $\alpha = 1$  en utilisant un argument fondé sur l'invariance par retournement du temps de la fonction de contour.

Finalement, signalons que dans le cas de la variance finie, Le Gall [72] utilise un théorème local limite fort pour estimer la densité  $D_n^{(\alpha)}$ . Cependant, dans le cas stable, il n'y a pas de théorème connu de ce type, ce qui nous oblige à utiliser un autre argument.

## 1.2.2 Conditionnement par le nombre de feuilles

Nous nous intéressons également aux propriétés asymptotiques d'arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un (grand) nombre de feuilles fixé. On rappelle que  $\lambda(\tau)$  désigne le nombre de feuilles de  $\tau$ . Considérons une loi de reproduction critique  $\mu$  dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\theta \in (1, 2]$ , et pour chaque  $n \geq 1$  tel que  $\mathbb{P}_\mu[\lambda(\tau) = n] > 0$ , notons maintenant  $t_n$  un arbre aléatoire de loi conditionnée  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) = n]$ . Afin de simplifier l'exposition, supposons que  $\mathbb{P}_\mu[\lambda(\tau) = n] > 0$  pour  $n$  suffisamment grand. On rappelle que  $(B_n)$  est la suite de nombres réels tendant vers l'infini apparaissant dans le Théorème 1.1.4.

Notre contribution principale consiste à obtenir un équivalent de la probabilité  $\mathbb{P}_\mu[\lambda(\tau) = n]$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et à prouver la convergence de la marche de Lukasiewicz et des fonctions de hauteur et de contour de  $t_n$  convenablement renormalisées et ainsi d'étendre le théorème de Duquesne au cas où on conditionne par le nombre de feuilles.

Nous présentons les résultats et idées principales, et renvoyons au chapitre ?? pour les détails. Les notations restent les mêmes que dans la Section 1.1.

## Concentration du nombre de feuilles

Lorsque le nombre de feuilles d'un arbre est fixé, le nombre de sommets ne l'est généralement pas. Une première étape clé consiste ainsi à comprendre le comportement du nombre de feuilles d'un  $\text{GW}_\mu$  arbre avec  $n$  sommets, et, réciproquement, le nombre de sommets d'un  $\text{GW}_\mu$  arbres avec  $n$  feuilles :

### Proposition 2.

Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $n$  assez grand :

- (i)  $\mathbb{P}_\mu \left[ \left| \frac{\lambda(\tau)}{n} - \mu_0 \right| > \frac{1}{n^{1/4}} \text{ et } \zeta(\tau) = n \right] \leq e^{-c\sqrt{n}},$
- (ii)  $\mathbb{P}_\mu \left[ \lambda(\tau) = n \text{ et } \left| \zeta(\tau) - \frac{n}{\mu_0} \right| > \zeta(\tau)^{3/4} \right] \leq e^{-c\sqrt{n}}.$

D'après la Proposition 1.1.1, le nombre de feuilles d'un  $\text{GW}_\mu$  arbre a la même loi que la somme  $\sum_{k=1}^{\zeta_1} 1_{\{W_k - W_{k-1} = -1\}}$ . En effet, les feuilles de l'arbre correspondent au sauts d'amplitude  $-1$  de la marche de Lukasiewicz. En remarquant que cette dernière somme est constituée de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre  $\mu_0$ , la Proposition 2 est obtenue par des techniques de grandes déviations. Signalons qu'une technique similaire a été utilisée par Marckert & Mokkadem [79].

## Loi jointe $(\zeta(\tau), \lambda(\tau))$

Un autre ingrédient important est la détermination de la loi jointe de  $(\zeta(\tau), \lambda(\tau))$  sous  $\mathbb{P}_\mu$  :

### Proposition 3.

On a, pour  $1 \leq n \leq p$ ,

$$\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = p, \lambda(\tau) = n] = \frac{1}{p} \mathbb{P}[S_p = n] \mathbb{P}[W'_{p-n} = n - 1], \quad (1.10)$$

où  $S_p$  est la somme de  $p$  variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et  $W'$  est la marche aléatoire  $W$  conditionnée à ne faire que des sauts positifs.

Avant de donner l'idée de la preuve de cette formule, nous avons besoin d'introduisons la notation  $\Lambda(p) = \text{Card}\{0 \leq i \leq p - 1 ; W_{i+1} - W_i = -1\}$ . D'après la Proposition 1.1.1, nous avons  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = p, \lambda(\tau) = n] = \mathbb{P}[\Lambda(p) = n, \zeta_1 = p]$ . Un argument de type « lemme cyclique » permet d'écrire l'égalité

$$\mathbb{P}[\Lambda(p) = n, \zeta_1 = p] = \frac{1}{p} \mathbb{P}[\Lambda(p) = n, W_p = -1].$$

La Proposition 3 en découle aisément : en effet, il reste à choisir la place de  $n$  sauts d'amplitude  $-1$ , ce qui va donner la contribution  $\mathbb{P}[S_p = n]$ , et une fois qu'on a enlevé ces sauts, il nous reste une marche aléatoire conditionnée à ne pas faire de sauts d'amplitude  $-1$  et devant valoir  $n - 1$  à l'instant  $p - n$ , donnant la contribution  $\mathbb{P}[W'_{p-n} = n - 1]$ .

En sommant (1.10) par rapport à la plage de valeurs de  $p$  (fournie par la Proposition 2) apportant une contribution significative, une transformation série-intégrale et l'utilisation de théorèmes locaux limites estimant les probabilités apparaissant dans le terme de droite de la formule de la Proposition 3, permettent d'obtenir l'estimée suivante, où  $p_1$  désigne la densité de  $X_1$ .

**Théorème 4.**

$$\text{On a } \mathbb{P}_\mu[\lambda(\tau) = n] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mu_0^{1/\theta} p_1(0) \frac{1}{nB_n}.$$

Ce résultat est à comparer avec l'équivalent classique de  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = n]$  : lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = n] \sim p_1(0)/(nB_n)$  (cela découle immédiatement du théorème local limite et de l'égalité  $\mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) = n] = \mathbb{P}[W_n = -1]/n$ ).

**Limites d'échelle**

Citons maintenant l'extension du théorème de Duquesne au conditionnement par le nombre de feuilles :

**Théorème 5.**

Le triplet

$$\left( \frac{1}{B_{\zeta(t_n)}} \mathcal{W}_{[\zeta(t_n)t]}(t_n), \frac{B_{\zeta(t_n)}}{\zeta(t_n)} C_{2\zeta(t_n)t}(t_n), \frac{B_{\zeta(t_n)}}{\zeta(t_n)} H_{\zeta(t_n)t}(t_n) \right)_{0 \leq t \leq 1}$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers  $(X_t, H_t, H_t)_{0 \leq t \leq 1}$  sous  $\mathbf{N}(\cdot | \zeta = 1)$ .

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\zeta(t_n)/n$  converge en probabilité vers  $1/\mu_0$ , de sorte qu'il est possible de remplacer les facteur  $1/B_{\zeta(t_n)}$  et  $B_{\zeta(t_n)}/\zeta(t_n)$  par respectivement  $\mu_0^{1/\theta}/B_n$  et  $\mu_0^{1-1/\theta} B_n/n$  sans changer le résultat du théorème. Ceci amène à plusieurs applications intéressantes :

- la suite d'arbres aléatoires  $(t_n, \mu_0^{1-1/\theta} \frac{B_n}{n} \cdot d_{gr})$  converge en loi au sens de la métrique de Gromov-Hausdorff, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers  $(\mathcal{T}_{H^{exc}}, d_{H^{exc}})$ ,
- lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_0^{1-1/\theta} \frac{B_n}{n} \cdot \mathcal{H}(t_n)$  converge en loi vers  $\sup_{0 \leq t \leq 1} H_t^{exc}$ ,
- si on note  $\Delta(t_n)$  le degré maximal de  $t_n$ , alors  $\mu_0^{1/\theta} \frac{1}{B_n} \Delta(t_n)$  converge en loi vers la quantité  $\sup_{0 < t \leq 1} (X_t^{exc} - X_{t-}^{exc})$ .

Finalement, la convergence de la marche de Lukasiewicz renormalisée joue un rôle important dans l'étude des laminations stables (voir section 2.1.2 et chapitre ??).

La preuve du Théorème 5 suit la structure générale exposée dans la partie 1.2.1. La première étape est de prouver le Théorème 5 lorsque  $t_n$  suit la loi  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) \geq n]$ . En reprenant les notations de la partie 1.2.1, il n'est malheureusement pas possible de trouver un sous-ensemble  $A \subset E$  d'excursions tel que  $(H^{(n)} | H^{(n)} \in A)$  soit distribué selon  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) \geq n]$ . Un autre argument est donc nécessaire. L'idée est d'utiliser le résultat de concentration de la Proposition 2 afin d'en déduire que les deux mesures conditionnées  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) \geq n]$  et  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \zeta(\tau) \geq \mu_0 n - n^{3/4}]$  sont proches pour  $n$  grand. On en tire le théorème limite souhaité sous  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) \geq n]$  à partir de celui sous  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \zeta(\tau) \geq n]$ . La deuxième étape consiste à utiliser une relation d'absolue continuité entre les deux mesures conditionnées  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) \geq n]$  et  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \lambda(\tau) = n]$ , puis de contrôler la densité obtenue.

Si le cheminement est similaire à celui de la preuve alternative du théorème de Duquesne, les estimées techniques nécessaires sont délicates et de multiples difficultés surviennent du fait que le nombre total de sommets n'est pas fixé.

## 1.3 Arbres de Galton-Watson non génériques

Nous nous intéressons maintenant aux limites d'échelle d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction  $\mu$  non générique, c'est-à-dire, en reprenant les notations de la Section 1.1.2, pour laquelle il n'existe pas  $\lambda > 0$  tel que  $Z_\lambda < \infty$  et  $\mu^{(\lambda)}$  soit critique.

L'étude de grands arbres de Galton-Watson non génériques conditionnés n'a été initiée que récemment par Jonsson & Steffánsson [62], qui se sont intéressés à leurs limites locales.

### 1.3.1 Limites locales d'arbres de Galton-Watson conditionnés

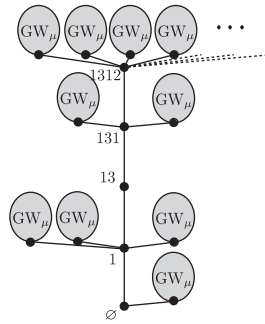
#### Convergence locale

Si  $(T_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}^*}$  est une suite d'arbres et  $T \in \mathbb{T}$ , on dit que  $T_n$  **converge localement** vers  $T$  si pour tout  $u \in U$ ,  $k_u(T_n) \rightarrow k_u(T)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Il est possible de munir  $\mathbb{T}$  d'une distance  $d_{loc}$  qui métrise cette notion de convergence et qui fait de  $(\mathbb{T}, d_{loc})$  un espace métrique complet et séparable (voir [59, Section 6]).

Une définition équivalente de la topologie locale, plus usuelle, passe par la convergence des « boules » centrées en la racine. Plus précisément, soit  $U^{[m]} = \bigcup_{k=0}^m \{1, \dots, m\}^k$ , et pour  $T \in \mathbb{T}$  notons  $T^{[m]} = T \cap U^{[m]}$ . Ainsi,  $T^{[m]}$  est obtenu à partir de  $T$  en tronquant  $T$  à la génération  $m$  et en ne gardant que les  $m$  premiers enfants des sommets qui restent. Il est alors possible de montrer que, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $T_n \rightarrow T$  si et seulement si  $T_n^{[m]} \rightarrow T^{[m]}$  pour tout  $m \geq 1$  (voir [59, Section 6]). La définition de convergence locale sous cette dernière forme a été proposée par Jonsson & Steffánsson [62]. La raison de l'introduction de  $U^{[m]}$  provient du fait que les arbres considérés ne sont pas nécessairement localement finis.

### L'arbre de Galton-Watson conditionné à survivre

Nous allons maintenant décrire la construction d'un arbre aléatoire infini qui sera la limite locale de grands arbres aléatoires. Soit  $\nu$  une loi de reproduction critique ou sous-critique. On note  $m_\nu$  sa moyenne. Soit  $\zeta_\nu^*$  la variable aléatoire définie par  $\mathbb{P}[\zeta_\nu^* = k] := k\nu_k/m_\nu$  pour  $k \geq 0$ . On introduit également la variable aléatoire  $S_\nu$  définie comme suit. Si  $m_\nu < 1$ , on pose  $\mathbb{P}[S_\nu = i] = (1 - m_\nu)m_\nu^{i-1}$  pour  $i \geq 1$ , et si  $m_\nu = 1$  on pose  $S_\nu = \infty$ .



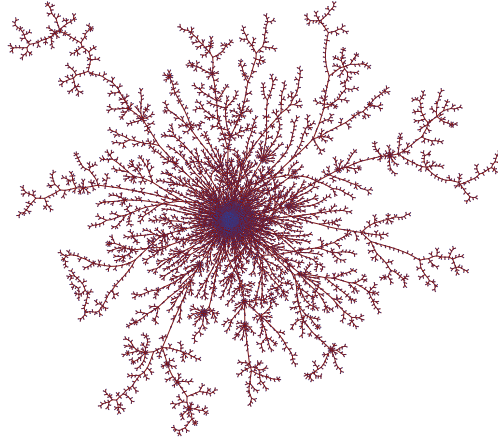
**FIGURE 1.5** – Un exemple de réalisation de  $\widehat{\mathcal{T}}_\nu$ . Ici, l'épine dorsale est constituée des sommets  $\emptyset, 1, 13, 131, 1312$ .

Soit  $\widehat{\mathcal{T}}_\nu$  l'arbre aléatoire infini construit informellement de la manière suivante (voir [59, Section 4] pour une définition plus précise). On commence avec une épine dorsale ayant un nombre aléatoire de sommets distribué selon  $S_\nu$ . On greffe ensuite des branches (voir figure 1.5) comme suit. D'une part, en haut de l'épine dorsale, on attache un nombre infini de branches, chaque branche étant un  $\text{GW}_\mu$  arbre (si  $S_\nu = \infty$ , l'épine dorsale est infinie et on n'effectue pas cette opération). D'autre part, à chaque autre sommet de l'épine dorsale, on attache un nombre aléatoire de branches distribué selon  $\zeta_\nu^* - 1$  soit à gauche soit à droite de l'épine de dorsale, chaque branche étant un  $\text{GW}_\mu$  arbre. Si  $k$  nouvelles branches ont été greffées sur un sommet, le nombre de branches greffées à gauche de ce sommet est uniformément distribué sur  $\{0, \dots, k\}$ . De plus, tous les choix aléatoires sont indépendants.

Janson [59, Théorème 7.1] a prouvé que pour n'importe quel arbre simplement généré  $\mathcal{T}_n$  associé à une suite de poids, il existe une loi de reproduction critique ou sous-critique  $\nu$  telle que  $\mathcal{T}_n$  converge localement en loi vers  $\widehat{\mathcal{T}}_\nu$ . Nous renvoyons à [59, Théorème 7.1] pour la construction explicite de  $\nu$  à partir de la suite de poids, mais précisons que si  $\mathcal{T}_n$  est un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets, l'égalité  $\nu = \mu$  n'est pas toujours vérifiée. Cependant, on a  $\nu = \mu$  lorsque  $\mu$  est critique ou bien  $\mu$  est sous-critique et le rayon de convergence de  $\sum \mu_i z^i$  vaut 1.

Cette convergence très générale était connue dans plusieurs cas particuliers. En 1986, Kesten [65] a construit  $\widehat{\mathcal{T}}_\nu$  lorsque  $\nu$  est critique et a prouvé la convergence locale de  $\mathcal{T}_n$  vers  $\widehat{\mathcal{T}}_\mu$  lorsque  $\mathcal{T}_n$  est un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir hauteur au moins  $n$ , avec  $\mu$  critique et de variance finie (mais sa méthode s'adapte aisément au cas où  $\mathcal{T}_n$  est un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets avec  $\mu$  critique et de variance finie). La construction de  $\widehat{\mathcal{T}}_\nu$  lorsque  $\nu$  est sous-critique est due à Jonsson & Steffánsson [62], qui ont démontré le résultat décrit précédemment

lorsque  $\mathcal{T}_n$  est un  $\text{GW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets, avec  $\mu$  sous-critique et telle que  $\mu_i \sim c/i^{1+\beta}$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ , où  $c > 0, \beta > 1$  sont des constantes.



**FIGURE 1.6** – Un exemple de réalisation de  $t_{10004}$  lorsque  $\mu$  est sous-critique et  $\mu_i \sim c/i^{1+\beta}$  avec  $\beta = 1.5$ .

## Condensation

Supposons que la loi de reproduction  $\mu$  soit sous-critique et que  $\mu_i \sim c/i^{1+\beta}$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ , où  $c > 0, \beta > 1$  sont des constantes. Notons  $m$  la moyenne de  $\mu$  et posons  $\gamma = 1 - m$ . Soit  $t_n$  un arbre aléatoire distribué selon  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \zeta(\tau) = n]$ . Jonsson & Steffánsson [62] ont mis en évidence un phénomène de condensation en prouvant que si  $\Delta(t_n)$  désigne le degré maximal de  $t_n$ , alors  $\Delta(t_n)/n$  converge en probabilité vers  $1 - m$ , et qu’avec probabilité tendant vers 1 les autres degrés sont  $o(n)$ .

Cependant, ce phénomène de condensation n’est pas universel parmi toutes les lois de reproduction non-génériques. En effet, Janson [59, Exemple 19.37] a construit un exemple de loi de reproduction  $\mu$  pour laquelle il existe deux sous-suites  $(n_j)$  et  $(n'_j)$  telles que d’une part  $\Delta(t_{n_j}) = o(n_j)$ , et d’autre part  $t_{n'_j}$  a deux sommets de degré  $n'_j/3$ , avec probabilité tendant vers 1 lorsque  $j \rightarrow \infty$ .

### 1.3.2 Limites d’échelle

Soit  $t_n$  un arbre aléatoire distribué selon  $\mathbb{P}_\mu[\cdot | \zeta(\tau) = n]$ , avec  $\mu$  une loi de reproduction non-générique. Notre contribution à la théorie des arbres non génériques consiste à étudier, pour des lois de reproduction non génériques particulières, des propriétés globales de  $t_n$  qui ne peuvent pas *a priori* être obtenues à partir de la seule convergence locale de  $t_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Soit  $\theta > 1$  fixé. Nous faisons les hypothèses suivantes sur  $\mu$  :

- (i)  $\mu$  est sous-critique (c’est-à-dire  $0 < \sum_{j=0}^{\infty} j\mu_j < 1$ ).
- (ii) Il existe une fonction à variation lente  $\mathcal{L} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\mu_n = \mathcal{L}(n)/n^{1+\theta}$  pour  $n \geq 1$ .



L'hypothèse (ii) est légèrement plus générale que le cas  $\mu_i \sim c/i^{1+\beta}$  étudié par Jonsson & Steffánsson [62] et Janson [59, Théorème 19.34]. Notre dessein est de répondre aux questions suivantes : les marches de Lukasiewicz, fonctions de contour et hauteur de  $t_n$ , convenablement renormalisées, convergent-elles ? Si on note  $u_*(t_n)$  le sommet ayant le plus d'enfants de  $t_n$ , que est le degré de  $u_*(t_n)$  (et quelles sont ses fluctuations) ? Quelle est la hauteur de  $u_*(t_n)$  ? Et enfin, quelle est la hauteur de  $t_n$  ?

Les notations de la partie 1.1.3 sont gardées. En particulier,  $(W_n; n \geq 0)$  désigne une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , issue de 0 et dont la loi des sauts est donnée par  $\nu(k) = \mu(k+1)$  pour  $k \geq -1$ .

### Convergence de la marche de Lukasiewicz : lois sous-exponentielles

Rappelons que l'on note  $\Delta(\tau)$  le plus grand nombre d'enfants d'un sommet de  $\tau$  (en particulier, le degré maximal de  $\tau$  est soit  $\Delta(\tau)$ , soit  $\Delta(\tau) + 1$ ).

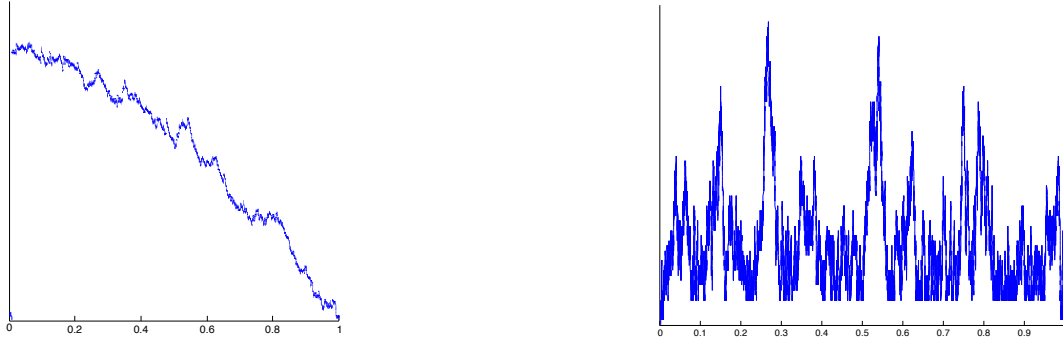


FIGURE 1.7 – Respectivement la marche de Lukasiewicz et la fonction de contour de l'arbre de la Fig. 1.6.

Le résultat suivant établit la convergence de la marche de Lukasiewicz normalisée de  $t_n$ .

#### Théorème 6.

Soit  $U(t_n) = \min\{j \geq 0; \mathcal{W}_{j+1}(t_n) - \mathcal{W}_j(t_n) = \Delta(t_n) - 1\}$  l'indice du premier sommet de  $t_n$  dans l'ordre lexicographique ayant le plus grand nombre d'enfants. Alors :

(i)  $U(t_n)/n$  converge en probabilité vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

(ii) On a  $\sup_{0 \leq i \leq U(t_n)} \frac{\mathcal{W}_i(t_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 0$ .

(iii) La convergence suivante a lieu en loi dans  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$  :

$$\left( \frac{\mathcal{W}_{\lfloor nt \rfloor \vee (U(t_n)+1)}(t_n)}{n}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\gamma(1-t), 0 \leq t \leq 1).$$

(iv) On a  $\frac{\Delta(t_n)}{\gamma n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 1$ .

La propriété (ii) implique que  $(W_{\lfloor nt \rfloor}(t_n)/n, 0 \leq t \leq 1)$  ne converge pas en loi dans l'espace  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$  vers  $(\gamma(1-t), 0 \leq t \leq 1)$ , ce qui explique pourquoi on ne considère  $\mathcal{W}(t_n)$  qu'à partir de l'instant  $U(t_n)$  dans (iii). Ces résultats indiquent qu'avec probabilité tendant vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , il existe un unique sommet de  $t_n$  ayant approximativement  $\gamma n$  enfants, dont l'indice lexicographique est  $o(n)$ , et tous les nombres d'enfants de tous les autres sommets de  $t_n$  sont  $o(n)$ . Ceci est bien sûr cohérent avec les résultats précédemment mentionnés de Jonsson & Stefánsson et Janson.

Il est possible de comprendre intuitivement l'apparition de la quantité  $\gamma$ . En effet, soit  $t'_n$  l'arbre aléatoire composé d'une racine sur laquelle on greffe  $cn$   $GW_\mu$  arbres indépendants, avec  $c > 0$ . Or, comme  $m < 1$ , le nombre moyen de sommets d'un  $GW_\mu$  arbre est  $1/(1-m) = 1/\gamma$ . Ainsi,  $\mathbb{E}[\zeta(t'_n)] = cn/\gamma$ . Si on admet un instant que  $t_n$  et  $t'_n$  sont proches, nous devons avoir  $cn/\gamma = n$ , ce qui donne  $c = \gamma$ .

La preuve du Théorème 6 passe par un lien avec des marches aléatoires conditionnées dont la loi des sauts est  $(0, 1]$ - sous-exponentielle dans le sens suivant.

Soit  $\Delta = (0, s]$  avec  $s \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$ . Pour  $x > 0$ , on pose  $x + \Delta = (x, x + s)$ . Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et considérons une marche aléatoire  $(Z_n)_{n \geq 0}$  issue de 0 dont la loi des sauts est  $\rho$ . On dit que  $\rho$  est  $\Delta$ - sous-exponentielle si  $\rho(x + \Delta) > 0$  pour  $x$  suffisamment grand, et, pour tous  $y \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\rho(x + y + \Delta)}{\rho(x + \Delta)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}[Z_n \in x + \Delta]}{n\rho(x + \Delta)} = 1.$$

Cette notion a été introduite par Asmussen, Foss & Korshunov [10]. Lorsque  $\rho$  est  $\Delta$ -sous-exponentielle, il existe une suite  $d_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq d_n} \left| \frac{\mathbb{P}[Z_n \in x + \Delta]}{n\rho(x + \Delta)} - 1 \right| = 0,$$

et plusieurs travaux ont donné des conditions sur  $(d_n)$  pour que cette formule soit vérifiée (voir [32]).

Armendáriz & Loulakis [9] ont étudié le comportement de marches aléatoires conditionnées dont la loi des sauts est  $\Delta$ - sous-exponentielle. Avant de citer leur résultat, introduisons l'opérateur  $T : \cup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n \rightarrow \cup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n$  qui échange la dernière composante et la (première) composante maximale d'une suite de nombre réels :

$$T(x_1, \dots, x_n)_k = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} x_i & \text{si } k = n \\ x_n & \text{si } x_k > \max_{1 \leq i < k} x_i \text{ et } x_k = \max_{k \leq i \leq n} x_i \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 1.3.1** (Armendáriz & Loulakis, Théorème 1 dans [9]). *Soit  $\rho$  une mesure de probabilité  $\Delta$ - sous-exponentielle et soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  la marche aléatoire associée. Posons  $R_n = Z_n - Z_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  de sorte que  $Z_n = R_1 + \dots + R_n$ . Pour  $n \geq 1$  et  $x > 0$ , soit  $\mu_{n,x}$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^n$  qui est la loi de  $(R_1, \dots, R_n)$  sous la loi conditionnelle  $\mathbb{P}[\cdot | Z_n \in x + \Delta]$ . Alors il existe une suite  $q_n \rightarrow \infty$  telle que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq q_n} \sup_{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n-1})} \left| \mu_{n,x} \circ T^{-1}[A \times \mathbb{R}] - \mu^{\otimes(n-1)}[A] \right| = 0.$$

Ce résultat signifie que si l'on considère une marche aléatoire sous  $\mathbb{P}[\cdot | Z_n \in x + \Delta]$  et qu'on enlève le saut maximal, alors asymptotiquement il nous reste  $n - 1$  sauts qui se comportent comme des variables i.i.d de loi  $\rho$ . Nous renvoyons à [9] pour le lien entre la suite  $(q_n)$  et la suite  $(d_n)$  évoquée précédemment.

Expliquons maintenant comment utiliser le Théorème 1.3.1 pour étudier la marche de Lukasiewicz de  $t_n$ . D'après la Proposition 1.1.1,  $(W_1(t_n), \dots, W_n(t_n))$  a la même loi que  $(W_1, \dots, W_n)$  sous  $\mathbb{P}[\cdot | \zeta_1 = -1]$ . Étudions d'abord  $(W_1, \dots, W_n)$  sous le conditionnement  $\mathbb{P}[\cdot | W_n = -1]$  qui est plus simple (il suffit ensuite d'appliquer une transformée de Vervaat). Un calcul simple donne  $\mathbb{E}[W_1] = -\gamma = m - 1$ . Comme il est plus commode de travailler avec variables aléatoires centrées, posons  $\bar{W}_n = W_n + \gamma n$  et  $\bar{R}_n = \bar{W}_n - \bar{W}_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ , de sorte que  $\bar{W}_n = \bar{R}_1 + \dots + \bar{R}_n$ .

Il s'agit donc d'étudier  $(\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_n)$  sous  $\mathbb{P}[\cdot | \bar{W}_n = \gamma n - 1]$ . Or, d'après nos hypothèses sur  $\mu$ , on a  $\mathbb{P}[\bar{W}_1 \in (x, x + 1)] \sim \mathcal{L}(x)/x^{1+\theta}$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Mais alors, d'après [32, Théorème 9.1], on a pour tout  $\epsilon > 0$  fixé, uniformément en  $x \geq \epsilon n$  :

$$\mathbb{P}[\bar{W}_n \in (x, x + 1)] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \mathbb{P}[\bar{W}_1 \in (x, x + 1)].$$

Ceci permet de dire que la loi de  $\bar{R}_1$  est  $(0, 1]$  – sous-exponentielle et d'appliquer le résultat d'Armendáriz & Loulakis avec  $q_n = \epsilon n$ . Ceci est l'argument clé pour prouver le Théorème 6. Nous renvoyons au chapitre ?? pour les détails.

En particulier, le Théorème 6 reste vrai si on affaiblit la condition «  $\mu_n = \mathcal{L}(n)/n^{1+\theta}$  » en la condition plus générale «  $\mu$  est  $(0, 1]$  – sous-exponentielle et on peut appliquer le Théorème 1.3.1 avec  $q_n = \epsilon n$  ». Cependant, tous les autres résultats qui vont suivre utilisent de manière cruciale le fait que  $\mu$  est dans le domaine d'attraction d'une loi stable.

Le raisonnement précédent permet également de décrire les fluctuations autour de  $\gamma n$  du nombre d'enfants du sommet ayant le plus grand nombre d'enfants. En effet, avec probabilité tendant vers 1 quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\gamma n - \Delta(t_n)$  se comporte comme la somme de  $n - 1$  variables aléatoires i.i.d. dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $2 \wedge \theta$ . On rappelle que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy stable spectralement positif d'indice  $2 \wedge \theta$ .

**Théorème 7.**

Il existe une fonction à variation lente  $L$  telle que

$$\frac{\Delta(t_n) - \gamma n}{L(n)n^{1/(2 \wedge \theta)}} \underset{n \rightarrow \infty}{\xrightarrow{(d)}} -X_1.$$

**Localisation du sommet de degré maximal**

Rappelons la notation  $u_*(t_n)$  pour le (premier) sommet ayant le plus d'enfants de  $t_n$  et  $U(t_n)$  pour l'indice du premier sommet de  $t_n$  dans l'ordre lexicographique ayant le plus grand nombre d'enfants. Il est possible de décrire la position de  $u_*(t_n)$  dans l'arbre  $t_n$  :

**Théorème 8.**

Les deux convergences suivantes ont lieu :

- (i) Pour  $i \geq 0$ ,  $\mathbb{P}[U(t_n) = i] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma \cdot \mathbb{P}_\mu[\zeta(\tau) \geq i + 1]$ .
- (ii) Pour  $i \geq 0$ ,  $\mathbb{P}[|u_*(t_n)| = i] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (1 - m)m^i$ .

Il est crucial de remarquer que les lois limites obtenues pour  $U(t_n)$  et  $|u_*(t_n)|$  sont des mesures de probabilité sur  $\mathbb{N}$  (ne chargeant pas  $+\infty$ ). Le point (i) se démontre à partir du Théorème 6 par un argument d'absolue continuité. Le point (ii) s'obtient en combinant (i) avec la convergence locale présentée en Section 1.3.1. Précisons qu'il ne suffit pas de dire que  $u_*(t_n)$  « converge » vers le haut de l'épine dorsale de la Section 1.3.1 : il faut encore pouvoir dire que  $u_*(t_n)$  ne s'échappe pas vers « l'infini », ce qui est exactement contenu dans le point (i).

**Hauteur de l'arbre**

La hauteur  $\mathcal{H}(t_n)$  de  $t_n$  ne croît pas comme une puissance de  $n$ , contrairement à ce qui se passe dans le cas critique :

**Théorème 9.**

Pour toute suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels strictement positifs divergeant vers l'infini, on a

$$\mathbb{P} \left[ \left| \mathcal{H}(t_n) - \frac{\ln(n)}{\ln(1/m)} \right| \leq \lambda_n \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Cela vient du fait que  $\mathcal{H}(t_n)$  est proche de la hauteur d'une forêt de  $\gamma n$   $GW_\mu$  arbres indépendants et qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\mathbb{P}_\mu[\mathcal{H}(\tau) \geq k] \sim c \cdot m^k$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Le Théorème 9 permet de régler la question de la convergence renormalisée des fonctions de hauteur et de contour de  $t_n$  :

**Théorème 10.**

Soit  $(r_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombre réels strictement positifs. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose soit  $Y^{(n)} = (C_{2nt}(t_n)/r_n, 0 \leq t \leq 1)$ , soit  $Y^{(n)} = (H_{nt}(t_n)/r_n, 0 \leq t \leq 1)$ .

- (i) Si  $r_n/\ln(n) \rightarrow \infty$ , alors  $Y^{(n)}$  converge en loi dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- (ii) Sinon, la suite  $(Y^{(n)})_{n \geq 1}$  n'est pas tendue dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

Voir Fig. 1.7 pour une simulation de la fonction de contour de  $t_n$ .

## *La triangulation brownienne : thème et variations*



Au début des années 1990, Aldous s’est intéressé aux triangulations d’un polygône régulier inscrit dans le cercle unité, et a prouvé que lorsque son nombre de côtés tend vers l’infini, une triangulation choisie uniformément au hasard converge, en un certain sens, vers une triangulation « continue » aléatoire du disque unité, appelée triangulation brownienne. Dans ce chapitre, il s’agit de généraliser le résultat d’Aldous à diverses classes de configurations non croisées aléatoires construites à partir des sommets du polygône. Les arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un nombre de feuilles fixé seront la pierre angulaire de ces travaux.

## 2.1 Dissections et laminations aléatoires

### 2.1.1 Triangulations uniformes et triangulation brownienne

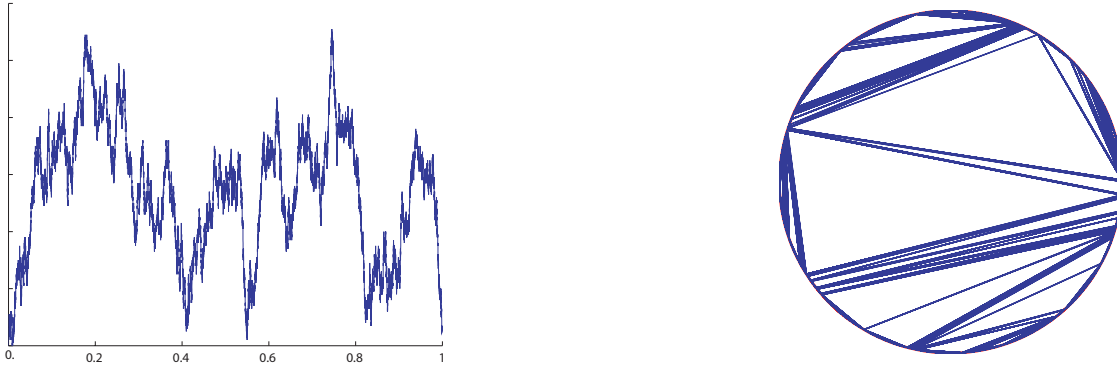
Soit, pour  $n \geq 3$ ,  $P_n$  le polygône régulier du plan dont les sommets sont les racines  $n$ -ièmes de l’unité. Par définition, une **dissection** de  $P_n$  est l’union des côtés de  $P_n$  et d’une collection de diagonales qui ne peuvent s’intersecter qu’en leurs extrémités. Les faces sont les composantes connexes du complémentaire de la dissection à l’intérieur de  $P_n$ . Une dissection est une **triangulation** lorsque toutes les faces sont des triangles.

Il est clair qu’une triangulation est un sous-ensemble compact du disque unité fermé  $\overline{\mathbb{D}}$ . Considérons une triangulation aléatoire  $\mathfrak{T}_n$ , choisie uniformément au hasard parmi toutes les triangulations de  $P_n$ . Aldous [6, 7] a eu l’idée d’étudier la convergence de  $\mathfrak{T}_n$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ , au sein de l’espace métrique des sous-ensembles compacts de  $\overline{\mathbb{D}}$  muni de la distance de Hausdorff. Il a démontré que  $\mathfrak{T}_n$  convergeait en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers un sous-ensemble compact aléatoire de  $\overline{\mathbb{D}}$  appelé « triangulation brownienne », que nous définissons maintenant.

Soit  $e$  une excursion brownienne normalisée. Rappelons la relation d’équivalence  $s \stackrel{e}{\sim} t$  sur  $[0, 1]$  introduite dans la Section 1.1.5 : pour  $s \leq t$ , on pose  $s \stackrel{e}{\sim} t$  si et seulement si on a  $e_s = e_t = \min_{r \in [s, t]} e_r$ . On définit alors (voir Fig. 2.1 pour un exemple) :

$$L(e) = \bigcup_{s \stackrel{e}{\sim} t} [e^{-2i\pi s}, e^{-2i\pi t}]. \quad (2.1)$$

L’excursion brownienne étant invariante par retournement du temps, il est possible de remplacer  $[e^{-2i\pi s}, e^{-2i\pi t}]$  par  $[e^{2i\pi s}, e^{2i\pi t}]$  sans changer la loi de  $L(e)$ , mais nous gardons les signes négatifs car nous préférons parcourir le cercle dans le sens horaire.



**FIGURE 2.1** – Une excursion brownienne  $e$  et la triangulation brownienne associée  $L(e)$ .

En utilisant le fait que les minimas locaux de  $e$  sont presque sûrement différents, il est aisé de voir que  $L(e)$  est p.s. fermé et composé de cordes qui ne s’intersectent pas, et que  $L(e)$  est effectivement une triangulation, en ce sens que son complémentaire à l’intérieur de  $\mathbb{D}$  est p.s. constitué d’une union disjointe de triangles dont les sommets sont sur le cercle unité.

**Théorème 2.1.1** (Aldous [6]). *La convergence suivante a lieu :*

$$\mathfrak{T}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e).$$

En conséquence, la longueur de la plus longue diagonale de  $\mathfrak{T}_n$  converge en loi vers la longueur de la plus longue corde de  $L(e)$ , et l’aire du triangle de plus grande aire de  $\mathfrak{T}_n$  converge vers l’aire du plus grand triangle de  $L(e)$ . Les lois de ces deux quantités dépendant de  $L(e)$  sont explicites (voir [6]).

Par ailleurs, Aldous [6] et Le Gall & Paulin [77] ont prouvé que  $L(e)$  est p.s. de dimension de Hausdorff  $3/2$ .

Finalement, signalons que deux autres modèles de triangulations aléatoires continues ont récemment été étudiés : l’un construit récursivement, introduit par Curien & Le Gall [27] et l’autre invariant par transformations conformes, introduit par Curien & Werner [29].

Il s’agit maintenant de donner une idée des techniques utilisées pour démontrer le Théorème 2.1.1 et d’expliquer l’apparition de la définition (2.1). Le point clé est d’associer à une triangulation uniforme de  $P_n$  un arbre binaire uniforme à  $2n - 3$  sommets par dualité, comme représenté sur la Figure 2.2.

Si  $\mathfrak{T}$  est une triangulation, on note  $\phi(\mathfrak{T})$  son arbre binaire associé. Considérons un triangle fixé de  $\mathfrak{T}_n$ , subdivisant les côtés de  $P_n$  en trois ensembles. Intéressons-nous à la proportion de côtés dans chacun de ces ensembles. Sur la Figure 2.2, le triangle spécifié subdivise les côtés de  $P_8$  en trois ensembles dont les proportions sont respectivement  $4/8, 2/8, 2/8$ .

Ces proportions peuvent également être lues sur la fonction de contour de l’arbre binaire : si on considère un sommet  $u \in \mathfrak{T}_n$  qui n’est pas une feuille et qu’on note  $s_1(u), s_2(u), s_3(u)$  les temps successifs de visites de  $u$  par la fonction de contour (l’arbre étant binaire,  $u$  est visité exactement trois fois), alors il est clair que le nombre total d’arêtes visitées par la fonction

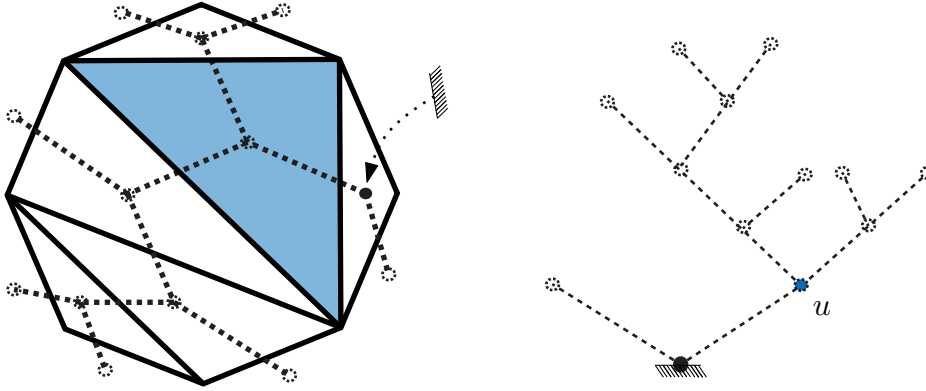


FIGURE 2.2 – Une triangulation de  $P_8$  et son arbre binaire associé par dualité.

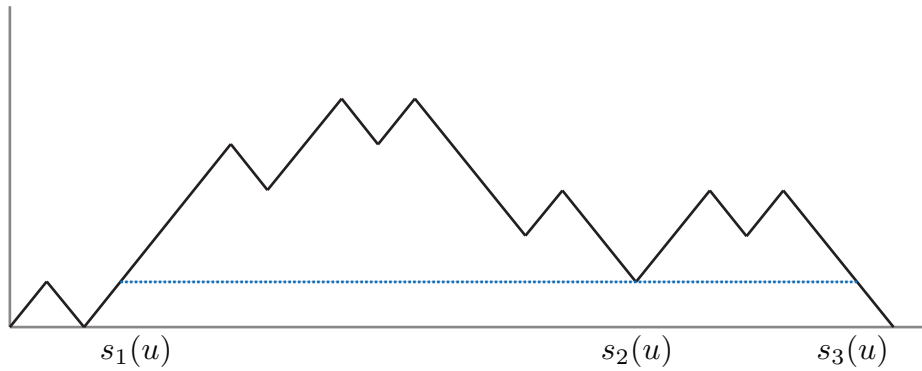


FIGURE 2.3 – La fonction de contour de l'arbre binaire de la Figure 2.2

de contour entre les instants  $s_1(u)$  et  $s_2(u)$  (resp.  $s_2(u)$  et  $s_3(u)$ ) est  $(s_2(u) - s_1(u))/2$  (resp.  $(s_3(u) - s_2(u))/2$ ), car chaque arête est visitée deux fois.

Or un arbre binaire a  $k$  arêtes si et seulement si il a  $k/2 + 1$  feuilles. Ainsi, le triangle associé à  $u$  par dualité subdivise les côtés de  $P_n$  en trois ensembles dont les proportions sont respectivement

$$\left( \frac{s_2(u) - s_1(u) + 2}{4n}, \frac{s_3(u) - s_2(u) + 2}{4n}, 1 - \frac{s_3(u) - s_1(u) + 4}{4n} \right).$$

Or  $\zeta(\phi(\mathfrak{T}_n)) = 2n - 3$ , de sorte que  $\phi(\mathfrak{T}_n)$  est un arbre binaire uniforme à  $2n - 3$  sommets, autrement dit un arbre de Galton-Watson de reproduction  $\mu$  donné par  $\mu_0 = \mu_2 = 1/2$ ,

conditionné à avoir  $2n - 3$  sommets. Le Théorème 1.1.3 nous donne alors :

$$\left( \frac{1}{2\sqrt{2n-3}} C_{2(2n-3)t}(\Phi(\mathfrak{T}_n)) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{e}. \quad (2.2)$$

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que cette convergence a lieu presque sûrement. Soit alors un instant  $s_2$  de minimum local de  $\mathbb{e}$ . Il existe  $s_1, s_3 \in [0, 1]$  tels que  $s_1 < s_2 < s_3$  et  $e_{s_1} = e_{s_2} = e_{s_3} = \min_{r \in [s_1, s_3]} e_r$ . Considérons le triangle

$$\bigcup_{1 \leq i, j \leq 3} [e^{-2i\pi s_i}, e^{-2i\pi s_j}]. \quad (2.3)$$

Par définition, chaque triangle de  $\mathbf{L}(\mathbb{e})$  peut être représenté sous cette forme. Nous allons maintenant voir que le triangle (2.3) peut être approché par des triangles de  $\mathfrak{T}_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

D'après (2.2), il existe des suites  $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}$  telles que  $s_i^{(n)}/(4n - 6) \rightarrow s_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $e_{s_1^{(n)}} = e_{s_2^{(n)}} = e_{s_3^{(n)}} = \min_{r \in [s_1^{(n)}, s_3^{(n)}]} e_r$ . D'après la discussion précédente, il existe un triangle de  $\mathfrak{T}_n$  dont les proportions sont respectivement

$$\left( \frac{s_2^{(n)}(u) - s_1^{(n)}(u) + 2}{4n}, \frac{s_3^{(n)}(u) - s_2^{(n)}(u) + 2}{4n}, 1 - \frac{(s_3^{(n)}(u) - s_1^{(n)}(u)) + 4}{4n} \right).$$

Or, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ce triplet converge vers  $(s_2 - s_1, s_3 - s_2, 1 - (s_3 - s_1))$ , qui sont exactement les proportions du cercle délimitées par le triangle (2.3).

Cet argument permet de montrer que chaque triangle de  $\mathbf{L}(\mathbb{e})$  est proche, au sens de la distance de Hausdorff, d'un triangle de  $\mathfrak{T}_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ce qui implique que  $\mathbf{L}(\mathbb{e})$  est contenue dans n'importe quelle valeur d'adhérence de la suite  $(\mathfrak{T}_n)$ . Or  $\mathbf{L}(\mathbb{e})$  est une triangulation maximale, en ce sens qu'il n'est pas possible de tracer une nouvelle corde sans en intersecter aucune autre. On en déduit alors la convergence  $\mathfrak{T}_n \rightarrow \mathbf{L}(\mathbb{e})$ .

Il est important de voir que dans cette esquisse de preuve le fait qu'on travaille avec des arbres binaires est crucial : d'une part, on utilise le fait que chaque sommet d'un arbre binaire qui n'est pas une feuille (sauf la racine) est visité exactement trois fois par la fonction de contour et, d'autre part, on utilise le fait qu'il existe une relation explicite entre le nombre de sommets et le nombre de feuilles d'un arbre binaire.

## 2.1.2 Laminations stables

Notre but est maintenant de généraliser le résultat d'Aldous à des dissections aléatoires qui ne sont pas nécessairement des triangulations.

L'équivalent continu d'une dissection est une lamination géodésique : par définition, une **lamination géodésique** (ou lamination) de  $\mathbb{D}$  est un sous-ensemble fermé  $L$  de  $\mathbb{D}$  qui est l'union d'une collection de cordes qui ne s'intersectent pas. La lamination  $L$  est dite **maximale** si elle est maximale au sens de l'inclusion parmi toutes les laminations géodésiques de  $\mathbb{D}$ . Par exemple, la triangulation brownienne  $\mathbf{L}(\mathbb{e})$  est une lamination maximale. Il est facile de voir que les laminations forment un sous-ensemble fermé vis-à-vis de la distance de Hausdorff.



En géométrie hyperbolique, les laminations géodésiques sont définies comme des sous-ensembles fermés du disque hyperbolique (voir [22]). Cependant, comme dans [27], nous voyons les laminations comme des sous-ensembles compacts de  $\overline{\mathbb{D}}$  pour pouvoir étudier leur convergence au sens de la distance de Hausdorff.

Généralisons le modèle d'Aldous des triangulations uniformes en considérant une suite de nombres réels positifs  $\mu = (\mu_j)_{j \geq 0}$ , appelée suite de poids. Pour  $n \geq 2$ , on note  $\mathbb{L}_n$  l'ensemble des dissections de  $P_{n+1}$ , et on pose

$$Z_n = \sum_{\omega \in \mathbb{L}_n} \prod_{f \text{ face de } \omega} \mu_{\deg(f)-1},$$

où  $\deg(f)$  est le degré de la face  $f$ , à savoir le nombre d'arêtes sur la frontière de  $f$ , et, pour chaque  $n \geq 2$  tel que  $Z_n \neq 0$ , on introduit la mesure de probabilité de Boltzmann sur  $\mathbb{L}_n$  associée à la suite de poids  $\mu$  :

$$\mathbb{P}_n^\mu(\omega) = \frac{1}{Z_n} \prod_{f \text{ face de } \omega} \mu_{\deg(f)-1}, \quad \omega \in \mathbb{L}_n.$$

Cette définition est similaire à celle des arbres aléatoires simplement générés introduits en Section 1.1.2. Deux cas sont particulièrement intéressants :

- pour un entier  $p \geq 3$ , si  $\mu_0 = 1 - 1/(p-1)$ ,  $\mu_{p-1} = 1/(p-1)$  et  $\mu_i = 0$  si  $i \notin \{0, p-1\}$ , alors  $\mathbb{P}_n^\mu$  est la mesure uniforme sur l'ensemble des dissections de  $\mathbb{L}_n$  dont toutes les faces ont degré  $p$  (dans ce cas, il faut se restreindre aux valeurs de  $n$  telles que  $n-1$  est multiple de  $p-2$ ). En particulier, pour  $p=3$  on retrouve le modèle des triangulations uniformes.
- Si  $\mu_0 = 2 - \sqrt{2}$  et  $\mu_i = ((2 - \sqrt{2})/2)^{i-1}$  pour  $i \geq 2$ , nous verrons dans la section suivante que  $\mathbb{P}_n^\mu$  est la mesure uniforme sur  $\mathbb{L}_n$ .

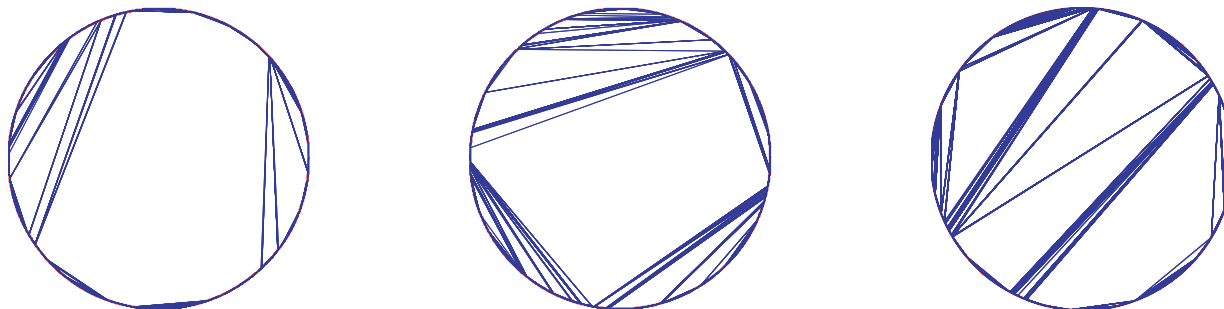
Pour  $n \geq 2$  tel que  $Z_n \neq 0$ , soit  $\mathfrak{L}_n$  une dissection aléatoire de  $\mathbb{L}_n$  de loi  $\mathbb{P}_n^\mu$ . Est-ce que la suite  $(\mathfrak{L}_n)$  converge en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une lamination aléatoire du disque ?

Nous répondons par l'affirmative à cette question dans le cas où  $\mu$  est critique et appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\theta \in (1, 2]$ . Commençons par définir la lamination aléatoire limite. Rappelons la notation  $H^{\text{exc}}$  pour le processus de hauteur normalisé d'indice  $\theta$  (voir Section 1.1.4). Soit  $\approx^{H^{\text{exc}}}$  la relation d'équivalence sur  $[0, 1]$  définie par  $s \approx^{H^{\text{exc}}} t$  si  $H_s^{\text{exc}} = H_t^{\text{exc}}$  et  $H_r^{\text{exc}} > H_s^{\text{exc}}$  pour tout  $r \in (s \wedge t, s \vee t)$ , ou bien si  $(s, t)$  est la limite d'un couple satisfaisant à ces propriétés. Posons alors :

$$\mathbf{L}(H^{\text{exc}}) = \bigcup_{s \approx^{H^{\text{exc}}} t} [e^{-2i\pi s}, e^{-2i\pi t}].$$

Voir Fig. 2.4 pour des exemples.

Il est facile de vérifier que  $\mathbf{L}(H^{\text{exc}})$  est une lamination aléatoire de  $\overline{\mathbb{D}}$ , appelée lamination stable d'indice  $\theta$  du disque. Pour  $\theta = 2$ ,  $\mathbf{L}(H^{\text{exc}})$  a la même loi que  $\mathbf{L}(\mathfrak{e})$  (car  $H^{\text{exc}}$  a la même loi que  $\sqrt{2} \cdot \mathfrak{e}$ ).



**FIGURE 2.4** – Dissections aléatoires de  $P_{27183}$  pour  $\theta = 1.1$ ,  $P_{11655}$  pour  $\theta = 1.5$  et de  $P_{20999}$  pour  $\theta = 1.9$ .

**Théorème 11.**

On suppose que  $\mu$  est une mesure de probabilité critique, dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\theta \in (1, 2]$  avec  $\mu_1 = 0$ . Alors :

$$\mathcal{L}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbf{L}(\mathbf{H}^{\text{exc}}).$$

De plus,  $\mathbf{L}(\mathbf{H}^{\text{exc}})$  est presque sûrement de dimension de Hausdorff  $2 - 1/\theta$ .

Ainsi, dès que  $\mu$  est de variance finie et  $\mu_1 = 0$ , il y a convergence de  $\mathcal{L}_n$  vers la triangulation brownienne, qui vérifie donc une propriété d'universalité. En particulier, les dissections uniformes dont toutes les faces ont un degré  $p \geq 3$  fixé convergent en loi vers la triangulation brownienne (ceci provient du fait que certaines arêtes dégénèrent à la limite pour ne donner que des triangles, et rappelle le fait que des arbres aléatoires conditionnés non nécessairement binaires convergent vers l'arbre brownien, dont tous les points de branchement sont binaires). En revanche, si  $\theta \in (1, 2)$ , des faces de degré infini apparaissent. Ceci est réminiscent du travail de Le Gall & Miermont [75] sur les cartes aléatoires tirées suivant des poids de Boltzmann, où des grandes faces demeurent à la limite lorsque la suite de poids a une queue lourde.

Le point clé pour établir le Théorème 11 est de remarquer que le dual  $\phi(\mathcal{L}_n)$  de  $\mathcal{L}_n$ , construit comme dans la Figure 2.2, a la même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\mu$ , conditionné à avoir  $n$  feuilles. L'idée directrice de la preuve suit alors celle du cas des triangulations uniformes en utilisant nos résultats concernant les arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un nombre de feuilles fixé.

Cependant, quelques différences majeures par rapport au cas des triangulations sont à noter, entraînant une complexification des arguments :

- l'arbre  $\phi(\mathcal{L}_n)$  n'étant plus forcément binaire, chaque sommet n'est pas nécessairement visité exactement trois fois par la fonction de contour. Au lieu d'utiliser la convergence de la fonction de contour renormalisée de  $\phi(\mathcal{L}_n)$ , il faut alors plutôt utiliser la convergence de la marche de Lukasiewicz renormalisée de  $\phi(\mathcal{L}_n)$ , garantie par le Théorème 5.

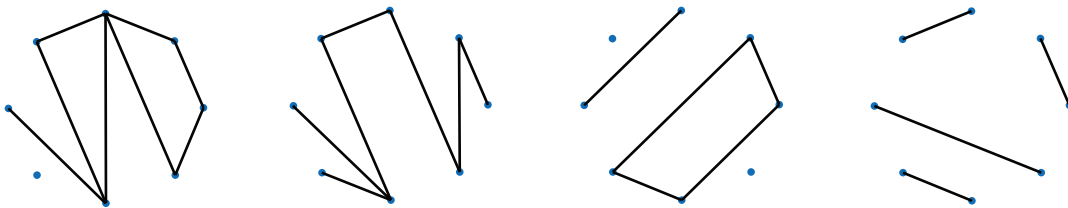
- lorsqu'un arbre n'est pas binaire, il n'y a pas de relation simple entre le nombre de sommets et le nombre de feuilles. Il s'agit alors d'utiliser les résultats de concentration établis par la Proposition 2 pour contrôler le nombre de feuilles d'un arbre de Galton-Watson conditionné.
- la lamination  $L(H^{\text{exc}})$  n'est pas maximale pour  $\theta \neq 2$ .

## 2.2 La triangulation brownienne : une limite universelle de configurations non croisées aléatoires

Après nous être intéressés à des dissections aléatoires tirées suivant des poids de Boltzmann, nous nous penchons sur d'autres modèles de configurations non-croisées tirées aléatoirement selon une loi uniforme. Un modèle que nous étudions en détail est celui des dissections choisies uniformément parmi toutes les dissections d'un polygône au nombre de côtés fixé. Nous verrons qu'il existe une suite de poids  $\mu$  telle que ces dissections uniformes puissent être réalisées comme des dissections tirées suivant  $\mu$ , ce qui permet une approche nouvelle des dissections uniformes.

### 2.2.1 Convergence vers la triangulation brownienne

Par définition, un **graphe non croisé** de  $P_n$  est un graphe tracé dans le plan dont les sommets sont les sommets de  $P_n$  et les arêtes sont des segments qui ne se coupent pas intérieurement. Un **arbre non croisé** de  $P_n$  est un graphe non croisé de  $P_n$  qui est un arbre. Une **partition non croisée** de  $P_n$  est un graphe non croisé de  $P_n$  qui est une réunion disjointe de cycles ou de segments. Une **partition en paires non croisées** de  $P_{2n}$  est un graphe non croisé constitué d'une union disjointe de segments tel qu'aucune composante connexe ne soit un singleton (voir Fig. 2.5 pour un exemple).



**FIGURE 2.5** – Exemple de, successivement, un graphe non croisé, un arbre non croisé, une partition non croisée et une partition en paires non croisées de  $P_8$ .

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\mathfrak{N}_n$  une dissection tirée uniformément parmi toutes les dissections de  $P_n$ , ou bien un graphe non croisé de  $P_n$  tiré uniformément parmi tous les graphes non croisés de  $P_n$ , ou bien un arbre non croisé de  $P_n$  tiré uniformément parmi tous les arbres non croisés de  $P_n$ , ou bien une partition non croisée de  $P_n$  tiré uniformément parmi toutes les partitions non croisées de  $P_n$ , ou bien une partition en paires non croisées de  $P_{2n}$  tirée uniformément parmi toutes les partitions en paires non croisées de  $P_{2n}$ .

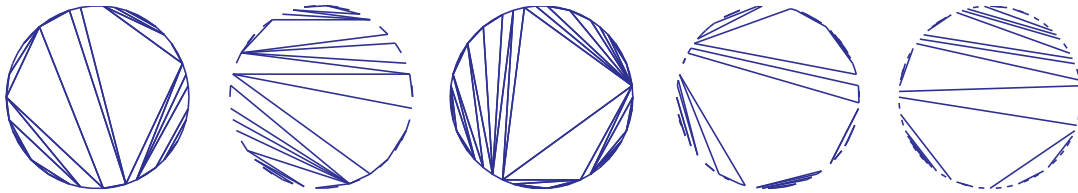
**Théorème 12** (avec N. Curien).

La convergence

$$\mathfrak{N}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbf{L}(\mathbb{D})$$

a lieu en loi dans l'espace métrique des sous-ensembles compacts de  $\overline{\mathbb{D}}$  muni de la distance de Hausdorff.

Ainsi, lorsque le nombre de côtés du polygône est très grand, toutes ces configurations non croisées uniformes ressemblent à un même objet aléatoire continu : la triangulation brownienne (voir Fig. 2.6).



**FIGURE 2.6** – Exemples de configurations non croisées uniformes : une dissection de  $P_{50}$ , un arbre non croisé de  $P_{50}$ , une triangulation de  $P_{50}$ , une partition non croisée de  $P_{100}$  et une partition en paires non croisées de  $P_{100}$ .

Un conséquence particulièrement intéressante de ce phénomène d'universalité est que la longueur de la plus longue diagonale (resp. l'aire de la plus grande face à l'intérieur de  $\overline{\mathbb{D}}$ ) de toutes ces configurations non croisées aléatoires va converger en loi vers la même loi de probabilité, qui est la longueur de la plus longue corde de la triangulation brownienne (resp. l'aire du triangle de plus grande aire de la triangulation brownienne).

L'idée clé pour démontrer le Théorème 12 est de remarquer que chacune de ces configurations non croisées uniformes peut être codée, en un certain sens, par un arbre de Galton-Watson conditionné, dont la loi de reproduction est de variance finie. Les fonctions de contour convenablement renormalisées de ces arbres conditionnés convergeant vers l'excursion brownienne, cela explique le Théorème 12 au niveau intuitif.

Présentons seulement ce codage pour les dissections uniformes (voir le chapitre ?? pour les autres modèles). À une dissection  $\mathfrak{D}$  de  $P_{n+1}$ , on associe un arbre  $\phi(\mathfrak{D})$  par dualité, comme sur la Figure 2.7.

Il est aisé de constater que  $\phi$  réalise une bijection entre l'ensemble des dissections de  $P_{n+1}$  et l'ensemble  $\mathbb{T}_n^{(\ell)}$  des arbres avec  $n$  feuilles tels qu'aucun sommet n'ait qu'un seul enfant. Ainsi, si  $\mathfrak{D}_n$  est une dissection uniforme de  $P_{n+1}$ , alors  $\phi(\mathfrak{D}_n)$  est uniformément distribué sur  $\mathbb{T}_n^{(\ell)}$ . Le résultat suivant, qui a également été prouvé indépendamment par Pitman & Rizzolo [91], établit que cette loi est en fait celle d'un arbre de Galton-Watson conditionné par le nombre de feuilles.

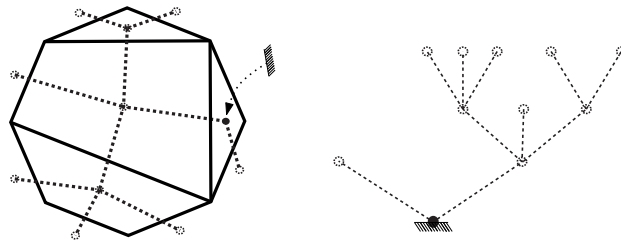


FIGURE 2.7 – Une dissection de  $P_8$  et son arbre associé par dualité.

**Proposition 13** (Avec N. Curien).

Un arbre aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble  $\mathbb{T}_n^{(\ell)}$  a la même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\mu^{(\ell)}$  donnée par

$$\mu_0^{(\ell)} = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_1^{(\ell)} = 0, \quad \mu_i^{(\ell)} = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1} \quad i \geq 2,$$

conditionné à avoir  $n$  feuilles.

Ce résultat est une conséquence simple du fait qu'on a  $\sum_{u \in \tau, k_u(\tau) > 0} (k_u(\tau) - 1) = \lambda(\tau) - 1$  pour tout arbre  $\tau$ .

La convergence de  $\mathcal{D}_n$  vers la triangulation brownienne s'obtient alors aisément en utilisant notre théorème limite (Théorème 5 dans cette Introduction) concernant la convergence renormalisées des fonctions codant les arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un nombre de feuilles fixé.

### 2.2.2 Propriétés combinatoires de grandes dissections uniformes

Divers travaux ont concentré leur attention sur des propriétés combinatoires de configurations aléatoires non croisées de  $P_n$  : Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger [34] se sont intéressés au degré maximal ainsi qu'à la longueur de la plus longue diagonale de triangulations uniformes, et Gao & Wormald [48] ont prouvé des résultats de concentration sur leur degré maximal. Deutsch & Noy [33] ont étudié de nombreuses statistiques d'arbres non croisés uniformes, et Marckert & Panholzer [81] ont établi qu'un arbre non croisé uniforme est « presque » un arbre de Galton-Watson. Finalement, Gao & Wormald [47] et Bernasconi, Panagiotou & Steger [14] obtiennent des résultats intéressants concernant la répartition des degrés de dissections uniformes.

Les arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un nombre de feuilles fixé apparaissent ainsi comme un nouvel outil pour étudier des propriétés combinatoires des dissections uniformes. Nous en déduisons des preuves probabilistes simples de certains résultats ayant été

obtenus par des méthodes de combinatoire analytiques, et nous établissons également certains résultats nouveaux.

La première application consiste à obtenir un équivalent du nombre de dissections de  $P_n$ . Flajolet et Noy [45] établissent par des méthodes de combinatoire analytique l'équivalent

$$\#\mathbb{L}_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{99\sqrt{2} - 140}{\pi}} n^{-3/2} (3 + 2\sqrt{2})^n. \quad (2.4)$$

Par des méthodes probabilistes utilisant les arbres de Galton-Watson conditionnés, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 14 (Avec N. Curien).**

Soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble non vide de  $\{3, 4, 5, \dots\}$ . Soit  $\mathbf{D}_n^{(\mathcal{A})}$  l'ensemble des dissections de  $P_{n+1}$  dont le degré de toutes les faces appartient à  $\mathcal{A}$ . On se restreint aux valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\mathbf{D}_n^{(\mathcal{A})} \neq \emptyset$ . Il existe une loi de probabilité  $\nu_{\mathcal{A}}$  sur  $\mathbb{N}$  telle que si  $\sigma_{\mathcal{A}}^2$  est la variance de  $\nu_{\mathcal{A}}$ , alors

$$\#\mathbf{D}_{n-1}^{(\mathcal{A})} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\nu_{\mathcal{A}}(2)^4 \nu_{\mathcal{A}}(0)^3}{2\pi\sigma_{\mathcal{A}}^2}} \cdot \frac{n^{-3/2}}{(\nu_{\mathcal{A}}(2)\nu_{\mathcal{A}}(0))^n}.$$

Lorsque  $\mathcal{A} = \{3, 4, 5, \dots\}$ , on a  $\#\mathbf{D}_{n-1}^{(\mathcal{A})} = \#\mathbb{L}_{n-1}$ ,  $\nu_{\mathcal{A}} = \mu^{(\ell)}$  et nous retrouvons (2.4).

Expliquons rapidement à quel moment interviennent les arbres de Galton-Watson dans la preuve du Théorème 14. Soit  $\mathfrak{D}_n^{(\mathcal{A})}$  une dissection de  $\mathbf{D}_n^{(\mathcal{A})}$  choisie uniformément au hasard. Comme dans la partie précédente, on voit que l'arbre dual  $\phi(\mathfrak{D}_n^{(\mathcal{A})})$  est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir  $n$  feuilles, pour une certaine loi de reproduction  $\nu_{\mathcal{A}}$  critique et de variance finie. En particulier, pour n'importe quel arbre  $\tau_0$  tel que  $\mathbb{P}[\phi(\mathfrak{D}_n^{(\mathcal{A})}) = \tau_0] > 0$ , on a :

$$\frac{1}{\#\mathbf{D}_{n-1}^{(\mathcal{A})}} = \frac{\mathbb{P}_{\nu_{\mathcal{A}}}[\tau = \tau_0]}{\mathbb{P}_{\nu_{\mathcal{A}}}[\lambda(\tau) = n]}.$$

Pour établir le Théorème 14, on choisit un arbre  $\tau_0$  particulier, on évalue les probabilités mises en jeu (en utilisant le Théorème 4 pour le dénominateur), et on fait tendre  $n \rightarrow \infty$ .

Une deuxième application de cet outil consiste à étudier des propriétés de graphe d'une dissection uniforme  $\mathfrak{D}_n$  de  $P_{n+1}$ . Introduisons quelques notations. Soient  $\delta^{(n)}$  le degré de la face adjacente au côté  $[1, e^{2i\pi/(n+1)}]$  dans la dissection  $\mathfrak{D}_n$  et  $D^{(n)}$  le degré maximal d'une face de  $\mathfrak{D}_n$ . De même, on note  $\partial^{(n)}$  le nombre de diagonales adjacentes au sommet d'affixe 1 dans  $\mathfrak{D}_n$ , et  $\Delta^{(n)}$  le nombre maximal de diagonales adjacentes à un sommet de  $\mathfrak{D}_n$ . Finalement, pour  $x, b > 0$ , on écrit  $\log_b(x)$  pour  $\ln(x)/\ln(b)$ .

**Théorème 15** (Avec N. Curien).

(i) On a, pour tout  $k \geq 3$  :

$$\mathbb{P}[\delta^{(n)} = k] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (k-1) \left( \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)^{k-2}.$$

(ii) On pose  $\beta = 2 + \sqrt{2}$ . Alors pour tout  $c > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(\log_{\beta}(n) - c \log_{\beta} \log_{\beta}(n) \leq D^{(n)} \leq \log_{\beta}(n) + c \log_{\beta} \log_{\beta}(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

(iii) On a pour tout  $k \geq 0$  :

$$\mathbb{P}(\partial^{(n)} = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (k+1)(2-\sqrt{2})^2(\sqrt{2}-1)^k.$$

(iv) On pose  $b = \sqrt{2} + 1$ . Alors, pour tout  $c > 0$  :

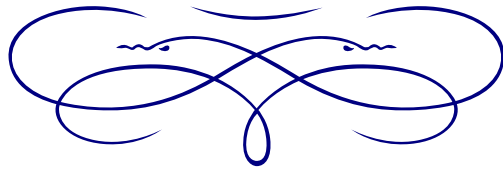
$$\mathbb{P}(\Delta^{(n)} \geq \log_b(n) + (1+c) \log_b \log_b(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le point (iv) résout une conjecture de Bernasconi, Panagiotou & Steger [14]. Tous ces résultats demeurent valides (avec des constantes différentes) lorsque  $\mathcal{D}_n$  est remplacé par  $\mathcal{D}_n^{(A)}$ .

Commentons brièvement les techniques utilisées pour démontrer le Théorème 15. Pour les points (i) et (iii), on prouve que l'arbre dual  $\phi(\mathcal{D}_n)$ , qui est un  $\text{GW}_{\mu^{(\ell)}}$  arbre conditionné à avoir  $n$  feuilles, converge localement en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers l'arbre de Galton-Watson conditionné à survivre  $\widehat{\mathcal{T}}_{\mu^{(\ell)}}$ . Or, par dualité,  $\delta^{(n)} - 1$  est le nombre d'enfants de la racine de  $\phi(\mathcal{D}_n)$ , qui converge donc en loi vers le nombre d'enfants de la racine de  $\widehat{\mathcal{T}}_{\mu^{(\ell)}}$ , qui suit exactement la loi apparaissant dans (i). La preuve de (iii) est similaire, en remarquant que  $\partial^{(n)}$  se lit aisément de manière « locale » sur  $\phi(\mathcal{D}_n)$ . En revanche, les points (ii) et (iv), faisant intervenir des quantités qui ne sont pas locales, sont plus délicats à prouver.

---

*Bibliographie*





## Bibliographie



- [1] R. Abraham, J.-F. Delmas, The forest associated with the record process on a Lévy tree, preprint, [arXiv:1204.2357](https://arxiv.org/abs/1204.2357).
- [2] L. Addario-Berry, Tail bounds for the height and width of a random tree with a given degree sequence, to appear in *Random Structures and Algorithms*.
- [3] D. Aldous, The continuum random tree I, *Ann. Probab.* **19**, 1-28 (1991).
- [4] D. Aldous. The continuum random tree. II. An overview. In *Stochastic Analysis (Durham, 1990)*. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **167** 23–70. Cambridge Univ. Press. (1991).
- [5] D. Aldous, The continuum random tree III, *Ann. Probab.* **21**, 248-289 (1993).
- [6] D. Aldous, Triangulating the circle, at random, *Amer. Math. Monthly* **101**, 223-233 (1994).
- [7] D. Aldous, Recursive self-similarity for random trees, random triangulations and Brownian excursion, *Ann. Probab.* **22**, 527-545 (1994).
- [8] D. Aldous, J. Pitman, Tree-valued Markov chains derived from Galton-Watson processes, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **34**, no. 5, 637-686 (1998).
- [9] I. Armendáriz, M. Loulakis, Conditional Distribution of Heavy Tailed Random Variables on Large Deviations of their Sum, *Stoch. Proc. Appl.* **121(5)** 1138-1147 (2011).
- [10] S. Asmussen, S. Foss, D. Korshunov, Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour, *J. Theoret. Probab.* **16(2)**, 489-518 (2003).
- [11] K. B. Athreya, P. E. Ney, *Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [12] N. Bacaër, *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, London : Springer-Verlag London Ltd, (2011).
- [13] J. Bennes, G. Kersting, A random walk approach to Galton-Watson trees, *J. Theoret. Probab.* **13**, 777-803, (2000).
- [14] N. Bernasconi, K. Panagiotou, A. Steger, On properties of random dissections and triangulations, *Combinatorica* **30(6)**, 627-654 (2010).
- [15] J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Univ. Press (1996).
- [16] J. Bertoin, Subordinators : examples and applications. Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997), 1-91, *Lecture Notes in Math.*, **1717**, Springer (1999).
- [17] P. Bialas, Z. Burda and D. Johnston, Condensation in the Backgammon Model, *Nucl. Phys. B* **493**, 505-516 (1997).

- [18] P. Biane, J. Pitman, M. Yor, Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38(4)**, 435-465 (2001).
- [19] I. J. Bienaymé, De la loi de multiplication et de la durée des familles, *Soc. Philomath. Paris Extraits*, Sér. 5, 37-39 (1845).
- [20] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Second Edition, Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc., New York (1999).
- [21] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. **27**, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).
- [22] F. Bonahon, Geodesic laminations on surfaces, in *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, *Contemp. Math.* **269**, Amer. Math. Soc., Providence, 1-37 (2001)
- [23] N. Broutin, J.-F. Marckert, Asymptotics for trees with a prescribed degree sequence, and applications, to appear in *Random Structures and Algorithms*.
- [24] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, American Mathematical Society (2001).
- [25] L. Chaumont, Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables, *Bull. Sci. Math.* **121(5)**, 377-403 (1997).
- [26] L. Chaumont, J. C. Pardo, On the genealogy of conditioned stable Lévy forests, *Alea* **6**, 261-279 (2009).
- [27] N. Curien, J.-F. Le Gall, Random recursive triangulations of the disk via fragmentation theory, *Ann. Probab.* **39**, 2224-2270 (2011).
- [28] N. Curien, I. Kortchemski, Random non-crossing plane configurations : A conditioned Galton-Watson tree approach, *Random Struct. Alg.*, à paraître.
- [29] N. Curien, W. Werner, The Markovian hyperbolic triangulation, to appear in *J. Eur. Math. Soc.*
- [30] L. de Haan, On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes, *Mathematical Centre Tract* **32**, Mathematics Centre, Amsterdam (1970).
- [31] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, Second edition, Applications of Mathematics **38**, Springer-Verlag, New York (1998).
- [32] D. Denisov, A. B. Dieker, V. Shneer, Large deviations for random walks under subexponentiality : The big-jump domain, *Ann. Probab.* **36(5)** 1946-1991 (2008).
- [33] E. Deutsch, M. Noy, Statistics on non-crossing trees, *Discr. Math.*, **254** , 75-87 (2002).
- [34] L. Devroye, P. Flajolet, F. Hurtado, M. Noy, W. Steiger. Properties of random triangulations and trees. *Discrete Comput. Geom.*, **22(1)** : 105-117 (1999).
- [35] M. Drmota, *Random Trees*, Springer, Wien (2009).
- [36] T. Duquesne, A limit theorem for the contour process of conditioned Galton-Watson trees, *Ann. Probab.* **31**, 996-1027 (2003).

- 
- [37] T. Duquesne, J.-F. Le Gall, Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes, *Astérisque* **281** (2002).
- [38] T. Duquesne, J.-F. Le Gall, Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees, *Probab. Th. Rel. Fields* **131**, no. 4, 553-603 (2005).
- [39] T. Duquesne, J.-F. Le Gall, The Hausdorff measure of stable trees, *Alea* **1**, 393-415 (2006).
- [40] R. Durrett, Conditioned limit theorems for random walks with negative drift, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **52**, 277-287 (1980).
- [41] R. Durrett, *Probability : Theory and Examples*, 4th edition, Cambridge U. Press (2010).
- [42] S.N. Evans, Probability and real trees, Lectures from the 35th Saint-Flour Summer School on Probability Theory, *Lecture notes in mathematics* **1920**, Springer, Berlin (2008).
- [43] S. Evans, J. Pitman, A. Winter, Rayleigh processes, real trees, and root growth with re-grafting. *Probab. Theory Relat. Fields*, **134(1)**, 81-126 (2006).
- [44] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2*, 2nd ed. New York, John Wiley (1971).
- [45] P. Flajolet, M. Noy, Analytic combinatorics of non-crossing configurations, *Discrete Math.*, **204(1-3)** 203-229 (1999).
- [46] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [47] Z. Gao, N. C. Wormald, The distribution of the maximum vertex degree in random planar maps, *J. Combin. Theory Ser. A*, **89(2)**, 201-230 (2000).
- [48] Z. Gao, N. C. Wormald, Sharp concentration of the number of submaps in random planar triangulations, *Combinatorica*, **23(3)**, 467-486, (2003).
- [49] J. Geiger, Elementary new proofs of classical limit theorems for Galton-Watson processes, *J. Appl. Probab.* **36 (2)**, 301-309 (1999).
- [50] J. Geiger, G. Kersting, The Galton-Watson tree conditioned on its height, *Proceedings 7th Vilnius conference* (1998).
- [51] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, No. **53**, 53-73 (1981).
- [52] S. Großkinsky, G.M. Schütz, and H. Spohn. Condensation in the zero range process : stationary and dynamical properties. *J. Stat. Phys.* **113 (3/4)** 389-410 (2003).
- [53] B. Haas, G. Miermont, Scaling limits of Markov branching trees with applications to Galton-Watson and random unordered trees, To appear in the *Annals of Probability*.
- [54] T. E. Harris, First passage and recurrence distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **73**, 471-486 (1952).
- [55] C. R. Heathcote, E. Seneta and D. Vere-Jones (1967), A refinement of two theorems in the theory of branching processes, *Theor. Probability Appl.* **12**, 297-301 (1967).

- [56] I.A. Ibragimov, Y.V. Linnik, *Independent and Stationary Sequences of Independent Random Variables*, Wolters-Noordhoff, Groningen (1971).
- [57] J. Jacod, A. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Series : Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 288, 2nd ed. (2003)
- [58] S. Janson, Rounding of continuous random variables and oscillatory asymptotics. *Ann. Probab.* **34(5)**, 1807-1826 (2006).
- [59] S. Janson, Simply generated trees, conditioned Galton-Watson trees, random allocations and condensation, *Probability Surveys* **9**, 103-252 (2012).
- [60] S. Janson, T. Jonsson, S. Ö. Stefánsson, Random trees with super-exponential branching weights. *J. Phys. A : Math. Theor.* **44**, 485002 (2011).
- [61] I. Jeon, P. March and B. Pittel, Size of the largest cluster under zero range invariant measures, *Ann. Prob.*, **28** 1162-1194 (2000).
- [62] T. Jonsson, S. Ö. Stefánsson, Condensation in non-generic trees, *J. Stat. Phys.* **142(2)**, 277-313 (2011).
- [63] D. P. Kennedy, The Galton-Watson process conditioned on the total progeny, *J. Appl. Prob.* **12** 800-806 (1975).
- [64] D. Kendall, The genealogy of genealogy : Branching processes before (and after) 1873, *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. **7**, 225-253 (1975).
- [65] H. Kesten. Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **22(4)** : 425–487 (1986).
- [66] H. Kesten, B. Pittel, A local limit theorem for the number of nodes, the height and the number of final leaves in a critical branching process tree, *Random Structures Algorithms* **8**, 243-299 (1996).
- [67] V.F. Kolchin, *Random Mappings*, Translation Series in Mathematics and Engineering. Optimization Software Inc. Publications Division, New York (1986).
- [68] I. Kortchemski, A simple proof of Duquesne’s theorem on contour processes of conditioned Galton-Watson trees, preprint, [arXiv:1109.4138](https://arxiv.org/abs/1109.4138), soumis.
- [69] I. Kortchemski, Random stable laminations of the disk, [arxiv:1106.0271](https://arxiv.org/abs/1106.0271), *Ann. Probab*, à paraître.
- [70] I. Kortchemski, Invariance principles for Galton-Watson trees conditioned on the number of leaves, *Stoch. Proc. Appl.* **122** 3126–3172 (2012).
- [71] I. Kortchemski, Limit theorems for conditioned nongeneric Galton-Watson trees, preprint, [arxiv:1205.3145](https://arxiv.org/abs/1205.3145), soumis.
- [72] J.-F. Le Gall, Itô’s excursion theory and random trees, *Stochastic Process. Appl.* **120**, no. 5, 721-749 (2010).
- [73] J.-F. Le Gall, Random trees and applications, *Probability Surveys* **2**, 245-311 (2005).
- [74] J.-F. Le Gall, Random real trees. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **15(1)**, 35-62 (2006).

- [75] J.-F. Le Gall, G. Miermont, Scaling limits of random planar maps with large faces, *Ann. Probab.*, **39** (1), 1-69, (2011).
- [76] J.-F. Le Gall, Y. Le Jan, Branching processes in Lévy Processes : The exploration process, *Ann. Probab.*, **26**(1), 213-512 (1998).
- [77] J.-F. Le Gall, F. Paulin, Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere, *Geom. Funct. Anal.*, **18**(3), 893-918 (2008).
- [78] R. Lyons, Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press. In preparation. Current version available at <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/> (2012).
- [79] J.-F. Marckert, A. Mokkadem, The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion. *Ann. Probab.*, **31**(3), 1655-1678 (2003).
- [80] J.-F. Marckert, A. Mokkadem, Limit of normalized quadrangulations : The Brownian map, *Ann. Probab.*, **34**(6), 2144-2202 (2006).
- [81] J.-F. Marckert and A. Panholzer. Noncrossing trees are almost conditioned Galton-Watson trees. *Random Structures Algorithms*, **20**(1) : 115-125 (2002).
- [82] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge. Studies in Advanced Mathematics, vol. **44**, Cambridge University Press (1995).
- [83] A. Meir, J. W. Moon, On the altitude of nodes in random trees, *Canad. J. Math.*, **30**, 997-1015 (1978).
- [84] A. Meir, J. W. Moon, On the maximum out-degree in random trees, *Australas. J. Combin.*, **2**, 147-156 (1990).
- [85] N. Minami, On the number of vertices with a given degree in a Galton-Watson tree, *Adv. Appl. Probab.* **37**, 229-264 (2005).
- [86] T. Mylläri, Limit distributions for the number of leaves in a random forest, *Adv. Appl. Prob.* **34** (4), 904-922 (2002).
- [87] T. Mylläri, Y. Pavlov, Limit distributions of the number of vertices of a given out-degree in a random forest, *J. Math. Sci* **138**(1), 5424-5433 (2006).
- [88] J. Neveu, Arbres et processus de Galton-Watson *Ann. Inst. Henri Poincaré* **22**, 199-207 (1986).
- [89] F. Paulin, The Gromov topology on R-trees, *Topology and its App.* **32**, 197-221 (1989).
- [90] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes*, Lecture Notes Math. **1875**. Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [91] J. Pitman, D. Rizzolo, Schröder's problems and scaling limits of random trees, [arxiv:1107.1760](https://arxiv.org/abs/1107.1760) (2011).
- [92] R. Pyke, D. Root, On convergence in r-mean of normalized partial sums, *Ann. Math. Statist.* **39**, 379-381 (1968).

- [93] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Third edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 293. Springer-Verlag, Berlin (1999).
- [94] D. Rizzolo, Scaling limits of Markov branching trees and Galton-Watson trees conditioned on the number of vertices with out-degree in a given set, [arxiv:1105.2528](https://arxiv.org/abs/1105.2528) (2011).
- [95] D. D. Sleator, R. E. Tarjan, and W. P. Thurston. Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, **1(3)** : 647-681 (1988).
- [96] F. Spitzer, *Principles of Random Walk*, Second Edition, New York : Springer-Verlag (1976).
- [97] J .F. Steffensen, Om sandsynligheden for at afkommet uddor, *Matematisk Tidsskrift B*, 19-23 (1930).
- [98] H. W. Watson, F. Galton, On the Probability of the Extinction of Families, *Journal of the Anthropological Institute of Great Britain* **4**,138-144 (1875).
- [99] V.M. Zolotarev, *One-Dimensional Stable Distributions*, Vol. 65 of Translations of Mathematical Monographs , American Mathematical Society (1986).