# Classements et polynômes eulériens

Igor Kortchemski[1]

*Lycée Louis le Grand, 75005 Paris, France*

**Résumé**

Dans cet article, nous établissons de manière bijective une relation entre le nombre de manières de réaliser un classement de $n$ personnes, s'autorisant les ex-aequo et $A_n(2)$, valeur du polynôme eulérien $A_n(q)$ au point $q = 2$.

## 1 Introduction

Cet article présente la preuve du corollaire 3.23 de [1] de manière moins étoffée, c'est-à-dire sans passer par les bonnes suites. La preuve est plus concise, mais perd en intuitivité. Ce résultat établit une relation entre un objet combinatoire, le nombre $f(n)$ de manières de réaliser un classement de $n$ personnes, s'autorisant les ex-aequo, et les polynômes eulériens. Le polynôme eulérien $A_n(q)$ étant défini par

$$\sum_{k\geq 0} k^n q^k = \frac{A_n(q)}{(1-q)^{n+1}},$$

nous avons en effet (theorème 3.6) :

$$f(n) = \frac{A_n(2)}{2},$$

où $A_n(2)$ désigne la valeur du polynôme eulérien $A_n(q)$ au point $q = 2$. Pour cela, nous notons $F_k$ l'ensemble des suites $s$ de longueur $k$ telles que tout $i \in [\max(s)]$ apparaît dans $s$. Nous introduisons l'ensemble

$$\mathfrak{M}_{a_1\ldots a_n} = \{s_1 \ldots s_n \in F_n \mid \text{ si } i < j,\ (a_i < a_j) \Longleftrightarrow (s_i < s_j)\}$$

pour $a_1 \ldots a_n \in \mathfrak{S}_n$ et nous montrons (theorème 3.2) que :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{M}_w) = 2^{\mathrm{Card}(\mathrm{des}(\mathrm{i}(w)))},$$

où $\mathrm{des}(\mathrm{i}(w)))$ est l'ensemble des descentes de la permutation inverse de $w$.

## 2 Préliminaires

Nous introduisons en premier lieu quelques notions qui nous seront nécéssaires par la suite.

[1] Adresse E-mail : `igork@free.fr`

## 2.1 Suites pleines et permutations

**Définitions.**

– On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur $n$ et $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

– Une *suite pleine* $s$ est une suite de $k$ entiers strictement positifs telle que tout $i \in [\max(s)]$ apparaît dans $s$. Soit $F_k$ l'ensemble des suites pleines de longueur $k$.

Par exemple, 1423625 est une suite pleine, mais 1522461 n'en est pas une, puisqu'elle ne contient pas 3.

Soit $f(n)$ le nombre de manières de classer $n$ participants d'une compétition, s'autorisant les ex aequo [3]. Par exemple, $f(3) = 13$ (six manières avec aucun ex aequo, trois manières avec deux ex aequo à la première place, trois manières avec deux ex aequo à la seconde place, et une manière avec trois ex aequo).

Il est facile de voir que $f(n) = \mathrm{Card}(F_n)$, puisqu'un tel classement peut être mis en bijection avec une suite pleine $s_1 \ldots s_n$ par la construction suivante : $s_i$ est la position de $i$ dans le classement.

**Définitions.**

– Soit $w = a_1 \ldots a_n \in \mathfrak{S}_n$. Une *descente* de $w$ est un entier $i$ pour lequel $a_i > a_{i+1}$. Par exemple dans $36\underline{7}2\underline{4}15$ il y a 2 descentes : 3 et 5. On note $\mathrm{des}(w)$ *l'ensemble des descentes* de $w$.

– $\mathrm{i}(w)$ désigne la *permutation inverse* de $w$ (elle est généralement notée $w^{-1}$ mais, comme nous le verrons, il est plus pratique pour nous d'utiliser $\mathrm{i}(w)$). Par définition, si $\mathrm{i}(w) = a_1 \ldots a_n$ alors $a_i$ est la position de $i$ dans $w$. Par exemple $\mathrm{i}(461235) = 345162$.

## 2.2 L'ensemble $\phi_w$

**Définition.** Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. On définit $\phi_w$ de la manière suivante :

$$\phi_w = \{k \in \mathbb{N} \,|\, k+1 \text{ apparaît à la gauche de } k \text{ dans } w\}.$$

Par exemple, $\phi_{51324} = \{2, 4\}$.

**Lemme 2.1** *Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Alors $\phi_w$ est l'ensemble des descentes de $i(w)$.*

**Preuve.** Nous avons successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} k \in \phi_u &\Leftrightarrow k+1 \text{ apparaît à la gauche de } k \text{ dans } w \\ &\Leftrightarrow \mathrm{i}(w)_k > \mathrm{i}(w)_{k+1} \\ &\Leftrightarrow k \text{ est une descente de } i(w) \end{aligned}$$

où $\mathrm{i}(w)_k$ est le $k$-ième élément de $\mathrm{i}(w)$. ■

## 2.3 Polynômes eulériens

On note $\mathrm{d}(w)$ le nombre de descentes de $w$.

$A_n(q)$ est appelé *polynôme eulérien* [2]. Le coefficient de $q^i$ dans $A_n(q)$ est noté $A(n, i)$ et vérifie la relation suivante [2] :

[2] L'existence de $A_n(q)$ provient de la relation $\sum_{k \geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$ sur laquelle on applique l'opération suivante $n$ fois à la suite : dériver par rapport à q puis multiplier par $q$.

$$\sum_{k\geq 0} k^n q^k = \frac{\sum_{i=1}^n A(n,i)q^i}{(1-q)^{n+1}}.$$

Par exemple,

$$\sum_{k\geq 0} k^4 q^k = \frac{q+11q^2+11q^3+q^4}{(1-q)^5}.$$

On prouve (voir [3]) que $A(n,k+1)$ compte le nombre de permutations de $[n]$ avec $k$ descentes, c'est-à-dire :

$$A_n(q) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} q^{1+\mathrm{d}(w)}.$$

Par exemple, $A_4(q) = q+11q^2+11q^3+q^4$ et effectivement dans $\mathfrak{S}_n$, il y a un élément avec aucune descente, onze avec une descente, onze avec deux descentes et un avec trois descentes.

### 2.4 L'application $\mathcal{B}$

Définissons l'application $\mathcal{B} : F_n \to \mathfrak{S}_n$ de la manière suivante : pour tout $s = b_1 \dots b_n \in F_n$ on construit $a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$ par l'algorithme suivant :

> Assigner $a_i = b_i$.
> **Pour** $i$ de 1 à $n$ par pas de 1
>     **Si** $i$ survient plus d'une fois dans $a_1 \cdots a_n$
>         Noter $k$ la position de la dernière apparition de $i$ dans $a_1 \cdots a_n$. Pour tout $j \in [n]$, tel que $j \neq k$ et $a_j \geq i$, incrémenter $a_j$ de 1.
>     **FinSi**
> **FinPour**
> Définir $a_1 \dots a_n$ comme $\mathcal{B}(s)$.

Représentons cet algorithme graphiquement : on met un entier entre crochets s'il ne survient qu'une seule fois dans la suite. Si l'entier considéré apparaît plusieurs fois, on encadre celui qui est le plus à droite. On souligne tous les entiers qui seront incrémentés.

Par exemple, prenons $s = 31223$ :

$$\begin{array}{lll}
\text{Etape 1 :} & 3\ [1]\ 2\ 2\ 3 & \rightsquigarrow\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3 \\
\text{Etape 2 :} & \underline{3}\ 1\ \underline{2}\ \boxed{2}\ \underline{3} & \rightsquigarrow\ 4\ 1\ 3\ 2\ 4 \\
\text{Etape 3 :} & 4\ 1\ [3]\ 2\ 4 & \rightsquigarrow\ 4\ 1\ 3\ 2\ 4 \\
\text{Etape 4 :} & \underline{4}\ 1\ 3\ 2\ \boxed{4} & \rightsquigarrow\ 5\ 1\ 3\ 2\ 4
\end{array}$$

Ainsi, après 2 étapes : $\mathcal{B}(31223) = 51324$.

Prenons $s = 2311423$ :

$$\begin{array}{lll}
\text{Etape 1 :} & \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \boxed{1}\ \underline{4}\ \underline{2}\ \underline{3} & \rightsquigarrow\ 3\ 4\ 2\ 1\ 5\ 3\ 4 \\
\text{Etape 2 :} & 3\ 4\ [2]\ 1\ 5\ 3\ 4 & \rightsquigarrow\ 3\ 4\ 2\ 1\ 5\ 3\ 4 \\
\text{Etape 3 :} & \underline{3}\ \underline{4}\ 2\ 1\ \underline{5}\ \boxed{3}\ \underline{4} & \rightsquigarrow\ 4\ 5\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5 \\
\text{Etape 4 :} & [4]\ 5\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5 & \rightsquigarrow\ 4\ 5\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5 \\
\text{Etape 5 :} & 4\ \underline{5}\ 2\ 1\ \underline{6}\ 3\ \boxed{5} & \rightsquigarrow\ 4\ 6\ 2\ 1\ 7\ 3\ 5
\end{array}$$

Ainsi, après 5 étapes : $\mathcal{B}(2311423) = 4621735$.

Remarquons que $a_1 \dots a_n$ est toujours une permutation : après $k$ étapes chacun des entiers $1, 2, \dots, k$ apparaît exactement une fois, d'après l'algorithme. Ainsi, après au plus $n$ étapes, nous obtenons une permutation.

L'interet de $\mathcal{B}$ réside dans la propriété suivante : soit $s \in F_n$. Soient $i, j \in [n]$ tels que $i \neq j$, $s = b_1 \dots b_n$ et $\mathcal{B}(s) = a_1 \dots a_n$. Clairement si $b_i > b_j$ alors $a_i > a_j$ car $b_i$ est incrémenté au moins le même nombre de fois que $b_j$, et si $b_i = b_j$ pour $i > j$ alors $a_i > a_j$ car $b_i$ sera incrémenté au moins une fois de plus que $b_j$, puisque $b_i$ est à la gauche de $b_j$. On en tire immédiatement le lemme suivant :

**Lemme 2.2** *Soit $s \in F_n$. Soient $s = b_1 \dots b_n$, $\mathcal{B}(s) = a_1 \dots a_n$ et $i, j \in [n]$ tels que $i < j$. Alors $b_i < b_j \Longleftrightarrow a_i < a_j$.*

Ce lemme constitue l'argument clé de la partie suivante.

## 3 Suites pleines et polynômes eulériens

Soit $a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$. On définit $\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$ comme suit :

$$\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n} = \{s_1 \dots s_n \in F_n \mid \text{ si } i < j,\ (a_i < a_j) \Longleftrightarrow (s_i < s_j)\}. \quad (1)$$

Par exemple, pour $w = 4132$, $\mathfrak{M}_{4132} = \{2122, 3122, 3132, 4132\}$.

C'est ici qu'intervient le lemme 2.2 de manière déterminante, puisqu'il fournit :

**Lemme 3.1** *Soit $s \in F_n$. Alors : $s \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}(s)}$.*

D'autre part, le théorème suivant est fondamental :

**Théorème 3.2** *On a :*

$$Card(\mathfrak{M}_w) = 2^{Card(des(i(w)))}.$$

Par exemple :
- $w = 123$ et $\mathfrak{M}_{123} = \{123\}$. $\text{Card}(\text{des}(\text{i}(123))) = \text{Card}(\text{des}(123)) = \text{Card}(\emptyset) = 0$
- $w = 132$ et $\mathfrak{M}_{132} = \{122, 132\}$. $\text{Card}(\text{des}(\text{i}(132))) = \text{Card}(\text{des}(132)) = \text{Card}(\{2\}) = 1$
- $w = 213$ et $\mathfrak{M}_{213} = \{112, 213\}$. $\text{Card}(\text{des}(\text{i}(213))) = \text{Card}(\text{des}(213)) = \text{Card}(\{1\}) = 1$
- $w = 231$ et $\mathfrak{M}_{231} = \{121, 231\}$. $\text{Card}(\text{des}(\text{i}(231))) = \text{Card}(\text{des}(312)) = \text{Card}(\{1\}) = 1$
- $w = 312$ et $\mathfrak{M}_{312} = \{212, 312\}$. $\text{Card}(\text{des}(\text{i}(312))) = \text{Card}(\text{des}(231)) = \text{Card}(\{2\}) = 1$
- $w = 321$ et $\mathfrak{M}_{321} = \{111, 211, 221, 321\}$. $\text{Card}(\text{des}(\text{i}(321))) = \text{Card}(\text{des}(321)) = \text{Card}(\{1, 2\}) = 2$.

**Lemme 3.3** *Soient $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$, $s = s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_w$ et $k, l$ des entiers strictement positifs tels que $a_k < a_l$. Alors $s_k \leq s_l$.*

**Preuve.** Si $k < l$, alors, d'après la définition de $s$, $a_k < a_l \Longrightarrow s_k < s_l \Longrightarrow s_k \leq s_l$. Maintenant, si $k > l$, supposons que $s_k > s_l$. D'après la définition de $s$, puisque $l < k$, $s_l < s_k \Longrightarrow a_l < a_k$ ce qui est une contradiction. ■

**Preuve du théorème 3.2 :** Soient $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$, $s = s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_w$ et soient $k, l$ des entiers strictement positifs tels que $a_l = a_k + 1$. Clairement, si $s_l \geq s_k + 2$, alors $s_k + 1$ n'apparaît pas dans $s$ d'après le lemme 3.3, ce qui contredit le fait que $s$ soit une suite pleine.

D'abord, supposons que $a_k \in \phi_w$, c'est-à-dire que $a_k + 1$ apparaît à la gauche de $a_k$ dans $w$. D'après le lemme 3.3, $s_l = s_k + 1$ ou $s_l = s_k$. Posons $j = a_k$. Soit $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Alors $k = i_j$ et $l = i_{j+1}$ car $i_j$ est la position de $j$ dans $w$. Ainsi :

$$j \in \phi_w \Longrightarrow s_{i_{j+1}} = s_{i_j} \text{ ou } s_{i_{j+1}} = s_{i_j} + 1. \tag{2}$$

Ensuite, supposons que $a_k \notin \phi_w$, c'est-à-dire que $a_k + 1$ apparaît à la droite de $a_k$ dans $w$. Alors $k < l$. D'après la définition de $s$, $a_k < a_l \Longrightarrow s_k < s_l \Longrightarrow s_l = s_k + 1$ d'après le lemme 3.3. De même, posons $j = a_k$. Soit $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Alors $k = i_j$ et $l = i_{j+1}$. Ainsi :

$$j \notin \phi_w \Longrightarrow s_{i_{j+1}} = s_{i_j} + 1. \tag{3}$$

Intuitivement on peut sentir ce qui va se passer : on veut construire un élément de $\mathfrak{M}_w$ en définissant récursivement la suite $s_{i_p}$ pour $p = 1, 2, \dots n$. D'après (2) et (3) on a deux choix pour tous les éléments de $\phi_w$ et un unique choix pour tous les éléments qui ne sont pas dans $\phi_w$, ce qui produit $2^{\mathrm{Card}(\phi_w)}$ éléments de $\mathfrak{M}_w$. Plus précisément, décrivons l'algorithme suivant :

Soit $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Posons $\mathbb{S} = \{11 \dots 11\}$, où $11 \dots 11$ est l'unique suite constituée de $n$ fois le nombre 1.

**Pour** $j$ de 1 à $n - 1$ par pas de 1
  **Si** $j \in \phi_w$
    $*$ Pour chaque suite $s = s_1 \dots s_n \in \mathbb{S}$, faire : $s_{i_{j+1}} := s_{i_j}$.
    $*$ Créer une nouvelle suite $s' = s$.
    $*$ Faire : $s'_{i_{j+1}} := s'_{i_j} + 1$.
    $*$ Ajouter $s'$ à $\mathbb{S}$.
  **Ou bien** ($j \notin \phi_w$)
    Pour chaque suite $s = s_1 \dots s_n \in \mathbb{S}$, faire : $s_{i_{j+1}} := s_{i_j} + 1$.
  **FinSi**
**FinPour**

On définit $\mathbb{S}_w$ comme l'ensemble final $\mathbb{S}$.

Par exemple pour $w = 25143$ on a $\mathrm{i}(w) = 31542$ et $\phi_{25143} = \{1, 3, 4\}$. Commençons avec $\mathbb{S} = \{11111\}$
Pour $j = 1$, puisque $1 \in \phi_{25143}$, on a $\mathbb{S} = \{11111\,,\ 21111\}$.
Pour $j = 2$, puisque $2 \notin \phi_{25143}$, on a $\mathbb{S} = \{11112, 21113\}$.
Pour $j = 3$, puisque $3 \in \phi_{25143}$, on a $\mathbb{S} = \{11122, 11132\,,\ 21133, 21143\}$.
Pour $j = 4$, puisque $4 \in \phi_{25143}$, on a finalement

$$\mathbb{S}_{25143} = \{12122, 13122\,,\ 13132, 14132\,,\ 23133, 24133\,,\ 24143, 25143\}.$$

**Proposition 3.4** *Nous avons l'inclusion suivante :* $\mathfrak{M}_w \subset \mathbb{S}_w$.

**Preuve.** Cette inclusion est évidente car tout élément de $\mathfrak{M}_w$ vérifie (2) et (3), de sorte qu'il sera produit par l'algorithme et sera par conséquent un élément de $\mathbb{S}_w$. ■

**Proposition 3.5** *Nous avons l'inclusion suivante :* $\mathbb{S}_w \subset \mathfrak{M}_w$.

**Preuve.** Soient $w = a_1 \dots a_n$ une permutation fixée et $s \in \mathbb{S}_w$. Posons $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Il est clair par construction que $s$ est une suite pleine. Montrons que pour $x < y$, $(a_x < a_y) \Longleftrightarrow (s_x < s_y)$.

Soient $x, y$ tels que $x < y$ et $a_x < a_y$. Alors il existe $k$ tel que $x \leq k < y$ et $a_k \notin \phi_w$. D'après l'algorithme :

$$s_x \leq s_{x+1} \leq \dots \leq s_k < s_{k+1} \leq \dots \leq s_y,$$

de sorte que $s_x < s_y$.

Soient $x, y$ tels que $x < y$ et $s_x < s_y$. D'après l'algorithme, si $s_{i_k} < s_{i_l}$ alors $k < l$. Or $x = i_{a_x}$, $y = i_{a_y}$ et $s_{i_{a_x}} < s_{i_{a_y}}$. Donc $a_x < a_y$. ■

Ainsi l'ensemble $\mathbb{S}_w$ est exactement $\mathfrak{M}_w$. Or le nombre d'éléments de $\mathbb{S}_w$ est $2^{\mathrm{Card}(\phi_w)}$. De plus, d'après le lemme 2.1 : $\mathrm{Card}(\phi_w) = \mathrm{Card}(\mathrm{des}(\mathrm{i}(w))))$. On en déduit que :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{M}_w) = 2^{\mathrm{Card}(\phi_w)} = 2^{\mathrm{Card}(\mathrm{des}(\mathrm{i}(w)))}.$$

■

Nous en déduisons aisément le théorème suivant :

**Théorème 3.6** *La relation suivante est vérifiée :*

$$f(n) = \frac{A_n(2)}{2}.$$

**Preuve.** Considérons toutes les permutations $w_1, \dots, w_{n!}$ de $[n]$. Les ensembles $\mathfrak{M}_{w_1}, \dots, \mathfrak{M}_{w_{n!}}$ sont clairement disjoints : en effet, supposons que $s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$ et que $s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_{a'_1 \dots a'_n}$. D'après la définition (1), pour $i < j$ on a $a_i < a_j \iff s_i < s_j \iff a'_i < a'_j$. Comme $a_1 \dots a_n$ et $a'_1 \dots a'_n$ sont des permutations, on a forcément $a_1 \dots a_n = a'_1 \dots a'_n$. Ainsi [3] :

$$F_n = \mathfrak{M}_{w_1} \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{M}_{w_{n!}}.$$

En effet, il est d'une part clair que tout élément de $\mathfrak{M}_{w_1} \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{M}_{w_{n!}}$ est une suite pleine et que d'autre part si $s$ est suite pleine alors $s \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}(s)}$, d'après le lemme 3.1. Soit $w$ une permutation telle que $\mathrm{i}(w)$ ait exactement $k$ descentes. D'après le théorème 3.2, $\mathrm{Card}(\mathfrak{M}_w) = 2^k$. Mais le nombre de permutations de $[n]$ ayant exactement $k$ descentes est $A(n, k+1)$. On en déduit que :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k A(n, k+1) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} A(n, k+1)}{2} = \frac{A_n(2)}{2}.$$

■

Note : On peut prouver (voir [3]) que la fonction génératrice exponentielle de $f(n)$ est $\dfrac{1}{2 - e^x}$.

## Remerciements

Je suis profondément reconnaissant à Federico Ardila et à Richard P. Stanley pour tout leur travail avec moi à la Clay Research Academy 2005 sur les bonnes suites. Je voudrais aussi remercier Federico Ardila, Xavier Caruso, Didier Missenard, Richard P. Stanley et le Clay Mathematics Institute pour leur rôle déterminant dans l'écriture de [1], sans lequel cet article n'aurait jamais vu le jour.

## Références

[1] I. Kortchemski, *Good Sequences, Bijections and Permutations*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Vol. 6, Issue 2, 2005. `http ://www.rose-hulman.edu/mathjournal/v6n2.php`

[2] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 1*, Cambridge, England : Cambridge University Press (1999).

[3] R. P. Stanley, *Clay Research Academy Problems* 2005, Non publié.

[3] Si $A$ et $B$ sont deux ensembles disjoints, on note $A \sqcup B$ leur *union disjointe*.