Bonnes suites et permutations

Igor Kortchemski

Lycée Louis le Grand, 75005 Paris[1]

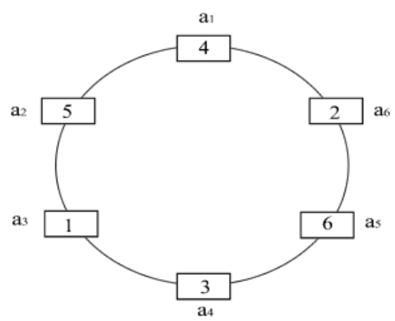
Résumé

Dans cet article, nous étudions les propriétés des bonnes suites grâce à un outil efficace et élégant en combinatoire, les preuves bijectives. Une bonne suite est une suite d'entiers strictement positifs $k = 1, 2, \ldots$ qui vérifie l'unique condition : k apparaît avant la dernière apparition de $k+1$. Nous construisons deux bijections entre l'ensemble des bonnes suites de longueur n et l'ensemble des permutations de longueur n, ce qui nous permet d'une part de dénombrer les bonnes suites, et d'autre part de calculer des fonctions génératrices de statistiques sur les bonnes suites. Finalement, nous étudions des motifs évitables sur les bonnes suites et montrons leurs relations avec les polynômes eulériens.

1 Introduction

Afin d'illustrer ce dont nous allons parlons, intéressons-nous à un exemple de la vie quotidienne : chaque jour, un facteur doit distribuer n lettres à n maisons situées au bord d'une route circulaire. Chaque maison doit recevoir la lettre qui lui est destinée. Pour faciliter sa tâche, le facteur repère toutes les maisons en les désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Il leur associe ensuite un entier entre 1 et n de manière totalement quelconque[2], chacun choisi exactement une fois.

Par exemple la route suivante est bordée de 6 maisons numérotées :



Le facteur numérote les n lettres par tous les entiers entre 1 et n. Il doit se plier aux trois règles suivantes :

- La lettre k doit être délivrée à la maison k
- La lettre k doit être délivrée avant la lettre $k+1$
- La tournée commence à la maison a_n et le facteur ne parcourt la route que dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le facteur, amateur de mathématiques à ses heures perdues, décide d'associer à la maison a_k l'entier b_k qui est égal au nombre de fois où il est passé devant la maison a_n (en comptant le départ), et ceci lorsqu'il délivre une lettre à la maison a_k.

[1] Adresse E-mail : `igork@free.fr`
Ce travail a été réalisé lorsque l'auteur était au Lycée Blaise Pascal à Orsay.

[2] en effet, le facteur souhaite de ne pas toujours suivre le même chemin pour ne pas s'ennuyer.

Les figures suivantes montrent sa tournée pour l'exemple précedent :

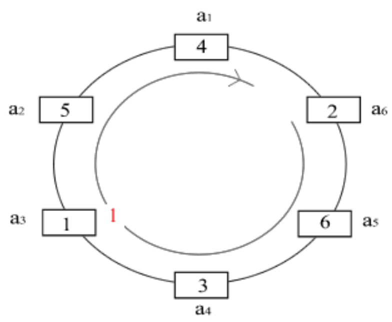


FIG. 1 – Premier tour du facteur

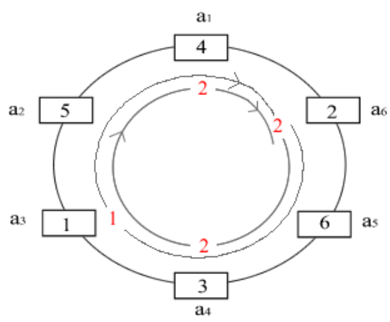


FIG. 2 – Deuxième tour

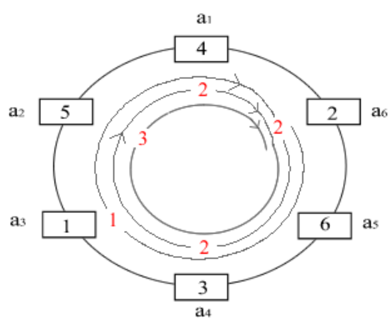


FIG. 3 – Troisième tour

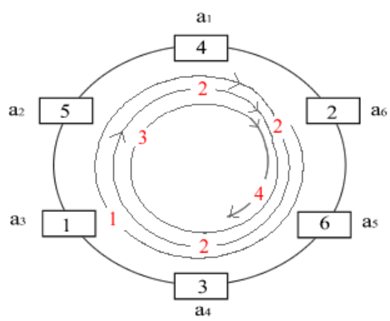


FIG. 4 – Quatrième tour

Ainsi pour $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 451362$, le facteur obtient $b_1b_2b_3b_4b_5b_6 = 231242$. En associant les n premiers entiers aux maisons de toutes les manières possibles, le facteur a pu obtenir $6! = 720$ suites différentes. Il s'est alors demandé si ces suites possédaient une propriété commune et si elles étaient facilement caractérisables. Nous allons l'aider à répondre à cette question en montrant que ces suites sont des suites d'entiers strictement positifs $k = 1, 2, \ldots$ qui vérifient l'unique condition : k apparaît avant la dernière apparition de $k + 1$.

Nous appellerons *bonne suite* toute suite finie vérifiant cette propriété. Les bonnes suites ont été introduites par Federico Ardila lorsqu'il étudiait une statistique sur les permutations [1]. Il a trouvé le nombre de bonnes suites de longueur fixée et a proposé ce problème à l'Olympiade Internationale de Mathématiques en 2002. Plus tard, Richard P. Stanley a utilisé ce résultat en tant qu'exercice à la Clay Research Academy 2005 [2]. Cet article présente un travail de recherche original sur les bonnes suites.

Dans cet article nous établissons des relations étroites entre les bonnes suites et les permutations. Pour atteindre ce but, nous construisons une bijection naturelle entre ces deux objets, procédé standard en combinatoire. Nous démontrons que l'ordre relatif des éléments d'une bonne suite est très proche de l'ordre des éléments d'une permutation grâce à une seconde bijection. Nous utilisons ce résultat pour étudier des motifs évitables sur les bonnes suites. Cela nous permet d'établir une relation surprenante de manière bijective reliant les polynômes Eulériens, définis en analyse, et le nombre de manières de réaliser un classement de n personnes, s'autorisant les ex-aequo.

2 Bonnes suites et bijections

2.1 Définition

Soit n un entier strictement positif. Une suite de n entiers strictement positifs (non nécéssairement distincts) est appelée *bonne suite* si elle satisfait la condition suivante : pour tout entier $k \geq 2$, si le nombre k apparaît dans la suite, alors il en est de même de $k-1$ et, de plus, la première apparition de $k-1$ survient avant la dernière apparition de k.

Par exemple :

2123 est une bonne suite de longueur 4.
31312 n'est pas une bonne suite : 2 survient pas avant la dernière apparition de 3.

Soit G_n l'ensemble de toutes les *bonnes suites* de longueur fixée n.
Plusieurs questions apparaissent : *G_n est-il fini ? Si oui, quel est son cardinal ?*
Le théorème suivant répond à ces interrogations.

2.2 Théorème Principal

Quelques exemples pour des petits n :

n=1 : $G_1 = \{1\}$
n=2 : $G_2 = \{11, 12\}$
n=3 : $G_3 = \{111, 112, 121, 122, 123, 212\}$
n=4 : $G_4 = \{$1111, 1112,1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1213, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234, 1323, 2112, 2121, 2122, 2123, 2132, 2212, 2312, 3123$\}$

de sorte que

$$\mathrm{Card}(G_1) = 1\,, \quad \mathrm{Card}(G_2) = 2\,, \quad \mathrm{Card}(G_3) = 6\,, \quad \mathrm{Card}(G_4) = 24.$$

On remarque que pour des petites valeurs de n, $\mathrm{Card}(G_n) = n!$. Nous allons prouver que cette relation est vérifiée pour tout n.

Théorème 2.1. *Le nombre de bonnes suites de longueur n vaut $n!$.*

La preuve consiste à construire une bijection $\mathcal{B}$ de G_n dans l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Puisque le cardinal de cet ensemble est $n!$, le théorème 2.1 en découlera immédiatement.

La construction a lieu en trois étapes.

2.2.1 Construction de $\mathcal{B}$

Définition : Soit $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de toutes les *permutations* de $[n]$.

Tout au long de cet article, nous utiliserons la notation $a_1 a_2 \ldots a_k$ pour noter une suite d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Nous noterons les permutations de la même manière que les suites : par exemple nous considérerons 564123 comme une permutation de 123456.

On définit $\mathcal{B} : G_n \to \mathfrak{S}_n$ par l'application suivante : $\forall\ u \in G_n$, $\mathcal{B}(u) = a_1 \ldots a_n$ où les a_i vérifient :

a_1 est la position de l'entier le plus grand de u.
a_2 est la position du deuxième entier le plus grand de u.
$\vdots$
a_i est la position du i-ième entier le plus grand de u.
$\vdots$
a_n est la position du n-ième entier le plus grand de u.

Note : parmi des entiers égaux on considère que celui qui est le plus grand est celui qui est *le plus à gauche* dans u.

Remarquons que, par construction, $a_1 \dots a_n$ est une permutation de $[n]$.

Par exemple :

Prenons $u = 2132$. Le plus grand élément de u est 3 et il est en troisième position. Donc $a_1 = 3$. Le deuxième plus grand élément de u est 2. Comme il y a plusieurs 2 dans u, on regarde celui qui est le plus à gauche. Il est en première position. Donc $a_2 = 1$. Le troisième plus grand élément de u est en quatrième position. Donc $a_3 = 4$. Finalement $a_4 = 2$. Ainsi :

$$\mathcal{B} : 2132 \mapsto 3142. \tag{1}$$

Prenons $u = 213421$. Le plus grand élément de u est 4, en quatrième position. Donc $a_1 = 4$. Le deuxième plus grand élément de u est 3, en troisième position. Donc $a_2 = 3$. Le troisième plus grand élément de u est 2 et celui qui est le plus à gauche est en première position. Donc $a_3 = 1$. Et de même on obtient :

$$\mathcal{B} : 213421 \mapsto 431526. \tag{2}$$

Note : On peut construire une bijection analague à $\mathcal{B}$ en partant du plus petit entier de u et en remontant de droite à gauche, mais on privilégiera $\mathcal{B}$ car elle nous permet de calculer les fonctions génératrices qui nous intéressent sur les bonnes suites.

2.2.2 Construction de $\mathcal{B}^{-1}$

Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une bijection nous allons construire l'application inverse de $\mathcal{B}$.

Définissons $\mathcal{B}^{-1} : \mathfrak{S}_n \to G_n$ comme suit : pour tout $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$, $\mathcal{B}^{-1}(w) = b_1 \dots b_n$ où les b_i sont définis récursivement par :

$b_{a_n} = 1$
Pour i de n à 2 par pas de -1

$$b_{a_{i-1}} = \begin{cases} b_{a_i} & \text{si } a_{i-1} < a_i \\ b_{a_i} + 1 & \text{si } a_{i-1} > a_i \end{cases}$$

FinPour

Une manière de visualiser cet algorithme consiste à construire un tableau $2 \times n$. On place la permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ dans la première ligne. On désigne par $b_1 b_2 \dots b_n$ les entiers de la deuxième ligne. On commence par fixer $b_n = 1$. On définit les b_i droite à gauche de la manière suivante : on parcourt de droite à gauche les a_i. Si on lit un entier supérieur, c'est-à-dire si $a_{i-1} > a_i$, alors on attribue la valeur $b_i + 1$ à b_{i-1}. Par contre, si on lit un entier inférieur, c'est-à-dire si $a_{i-1} < a_i$, alors on attribue la valeur b_i à b_{i-1}. Finalement, on réarrange dans l'ordre croissant la première ligne tout en gardant a_i solidaire à b_i. La deuxième ligne fournit alors la bonne suite.

Par exemple, pour $w = 3142$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $\mathcal{B}^{-1}(3142) = 2132$, comme dans (1).

Pour $w = 431526$:

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6\\ & & & & & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6\\ & & & & 1 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6\\ & & & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6\\ & & 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6\\ & 3 & 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6\\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

donc $\mathcal{B}^{-1}(431526) = 213421$, comme dans (2).

2.2.3 Preuve que l'on obtient une bijection

Nous allons d'abord montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Nous avons $\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{B} = Id$.*

Lemme 2.3. *Pour $u \in G_n$ soit $max(u)$ le plus grand élément de u. Alors pour tout $i \in [max(u)]$, i est un élément de u.*

Preuve : Cela découle directement de la définition d'une bonne suite. ■

Preuve de la proposition 2.2 : Soient $u = b_1 \dots b_n$ et $\mathcal{B}(u) = a_1 \dots a_n$. Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, nous allons montrer que, si $a_{i-1} > a_i$, alors $b_{a_{i-1}} = b_{a_i} + 1$ et que, si $a_{i-1} < a_i$, alors $b_{a_{i-1}} = b_{a_i}$.
Notons d'abord que a_{i-1} apparaît avant a_i dans $\mathcal{B}(u)$. Cela implique que $b_{a_{i-1}} \geq b_{a_i}$.

Si $a_{i-1} > a_i$: $b_{a_{i-1}}$ et b_{a_i} ne peuvent être égaux, car alors a_i serait apparu avant a_{i-1} dans $\mathcal{B}(u)$, puisqu'il est plus à gauche dans u. Finalement, si $a_{i-1} > a_i$, alors $b_{a_{i-1}} > b_{a_i}$ et d'après le lemme 2.3, $b_{a_{i-1}} = b_{a_i} + 1$.

Si $a_{i-1} < a_i$: supposons que $b_{a_{i-1}} > b_{a_i}$, c'est-à-dire $b_{a_{i-1}} = b_{a_i} + 1$ d'après le lemme 2.3. Puisque $a_{i-1} < a_i$, b_{a_i} apparaît seulement à la droite de $b_{a_{i-1}}$ (sinon a_i aurait été tel que $a_i < a_{i-1}$ puisqu'en cas d'égalité du plus grand élément nous choisissons celui qui est le plus à gauche). D'un autre côté, $\forall j \in \{2, \dots, n\}$ tel que $j \neq i$, $b_{a_{j-1}} \geq b_{a_j}$ et donc :

$$b_{a_{i-1}} > b_{a_i} \geq b_{a_{i+1}} \dots \geq b_{a_n}.$$

Ainsi, a_{i-1} est la dernière position dans laquelle $b_{a_{i-1}}$ apparaît.
Donc d'après les remarques précédentes, b_{a_i} ne survient pas avant la dernière apparition de $b_{a_{i-1}} = b_{a_i} + 1$, ce qui est une contradiction. Finalement, si $a_{i-1} < a_i$, alors $b_{a_{i-1}} = b_{a_i}$.

Le plus petit élément de w est 1 d'après le lemme 2.3, de sorte que $b_{a_n} = 1$. Par (2.2.2) nous concluons que $\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{B} = Id$. Donc $\mathcal{B}^{-1}$ est surjective et $\mathcal{B}$ est injective. ■

Définition : Soit $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$. Une *descente* de w est un entier i pour lequel $a_i > a_{i+1}$. Par exemple dans $36\underline{7}2\underline{4}15$ il y a 2 descentes : 3 et 5.

Proposition 2.4. *L'application $\mathcal{B}^{-1}$ est injective.*

Preuve : Soit $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$. Supposons que w ait exactement m descentes. On peut naturellement partager w en $m + 1$ sous-suites $w_1, \dots, w_{m+1}$ telles que w_i ne contienne pas de descentes, *i.e.* w_i soit croissante et telles que $w = w_1 \dots w_{m+1}$. Soit $\mathcal{B}^{-1}(w) = b_1 \dots b_n$. D'après la définition de la bijection $\mathcal{B}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
b_i &= 1 && \text{pour } i \in w_{m+1} \\
b_i &= 2 && \text{pour } i \in w_m \\
&\vdots \\
b_i &= m+2-j && \text{pour } i \in w_j \\
&\vdots \\
b_i &= m+1 && \text{pour } i \in w_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Par exemple, pour $w = 3672415$ on a $w_1 = 367$, $w_2 = 24$, $w_3 = 15$. On trouve que

$$\mathcal{B}^{-1}(3672415) = b_1 \dots b_7 = 1232133$$

et en effet :

$$\begin{aligned}
b_i &= 1 && \text{pour } i \in \{1,5\} \\
b_i &= 2 && \text{pour } i \in \{2,4\} \\
b_i &= 3 && \text{pour } i \in \{3,6,7\}.
\end{aligned}$$

Soient w et w' deux permutations de longueur n. Ainsi, $\mathcal{B}^{-1}(w) = \mathcal{B}^{-1}(w')$ si, et seulement si, w et w' ont le même nombre de descentes et exactement les mêmes sous-suites croissantes définies ci-dessus, autrement dit si, et seulement si $w = w'$. Cela prouve l'injectivité de $\mathcal{B}^{-1}$. ■

On en déduit que $\mathcal{B}^{-1}$ est une bijection, et donc que $\mathcal{B}$ est également une bijection. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Card}(G_n) = \mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!}$$

■

2.3 Statistiques sur G_n

Une *statistique* sur G_n est une application de l'ensemble des bonnes suites dans l'ensemble des entiers positifs. Pour une certaine statistique $\mathrm{stat}(u)$, on définit sa fonction génératrice par la somme suivante :

$$\sum_{u \in G_n} q^{\mathrm{stat}(u)}.$$

La bijection $\mathcal{B}$ permet de calculer les statistiques suivantes, établies dans [6] :

$$\sum_{u \in G_n} q^{\max(u)} = A_n(q),$$

où $max(u)$ est le plus grand élément de u et $A_n(q)$ le polynôme Eulérien qui sera ultérieument défini en section 4. D'autre part :

$$\sum_{u \in G_n} q^{\deg(u)} = q^n(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}),$$

où $deg(u)$ est la somme des éléments de u. Les démonstrations consistent à transformer une statistique sur les bonnes suites en une statistique sur les permutations par l'intermédiaire de la bijection $\mathcal{B}$. L'interêt réside dans le fait que la fonction génératrice de cette statistique est connue : on en déduit alors immédiatement la fonction génératrice qui nous intéresse.

3 Records et $\mathcal{B}_2$

Nous venons de voir que la bijection $\mathcal{B}$ était intéressante car elle transportait une certaine propriété d'une bonne suite sur une certaine propriété d'une permutation. En étudiant les bonnes suites et les permutations, on constate que leur comportement vis-à-vis des records est identique. Or la bijection $\mathcal{B}$ ne transporte pas la propriété de record. Nous allons donc construire une autre bijection entre l'ensemble des bonnes suites et l'ensemble des permutations pour rendre compte de cette propriété.

Définition : Soit $u = a_1 \dots a_n$ une suite d'entiers strictement positifs. Un *record* de u est un terme a_j tel que $a_i < a_j$ pour tout $i < j$. On définit $\mathrm{rec}(w)$ comme le nombre total de records de w et $\mathrm{srec}(w)$ comme la somme des positions de tous les records de w.

Par exemple, dans 47516823 il y a 3 records qui sont 4,7 et 8. D'où $\mathrm{rec}(47516823) = 3$ et $\mathrm{srec}(47516823) = 1 + 2 + 6 = 9$.

Théorème 3.1. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\sum_{u \in G_n} q^{rec(u)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{rec(w)} = q(q+1)(q+2)\cdots(q+n-1)$$

et

$$\sum_{u \in G_n} q^{srec(u)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{srec(w)}.$$

Afin de prouver ce théorème, nous allons construire une nouvelle bijection $G_n \to \mathfrak{S}_n$ qui va préserver la position des records.

3.1 Construction d'une nouvelle bijection

Définissons $\mathcal{B}_2 : G_n \to \mathfrak{S}_n$ de la manière suivante : pour tout $u = b_1 \dots b_n \in G_n$ on construit $a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$ et on introduit, pour une utilisation ultérieure, l'ensemble ϕ_u par l'algorithme suivant :

> Assigner $a_i = b_i$ et créer un ensemble vide ϕ_u.
> **Pour** i de 1 à n par pas de 1
>   **Si** i survient plus d'une fois dans $a_1 \cdots a_n$
>   Noter k la position de la dernière apparition de i dans $a_1 \cdots a_n$. Pour tout $j \in [n]$, tel que $j \neq k$ et $a_j \geq i$, incrémenter a_j de 1.
>   Ajouter i à l'ensemble ϕ_u.
>   **FinSi**
> **FinPour**
> Définir $a_1 \dots a_n$ comme $\mathcal{B}_2(u)$.

Représentons cet algorithme graphiquement : on met un entier entre crochets s'il ne survient qu'une seule fois dans la suite. Si l'entier considéré apparaît plusieurs fois, on encadre celui qui est le plus à droite. On souligne tous les entiers qui seront incrémentés.

Par exemple, prenons $u = 31223$:

$$\begin{array}{llcll}
\text{Etape 1 :} & 3\ [1]\ 2\ 2\ 3 & \rightsquigarrow & 3\ 1\ 2\ 2\ 3 & \phi_u = \{\} \\
\text{Etape 2 :} & \underline{3}\ 1\ \underline{2}\ \boxed{2}\ \underline{3} & \rightsquigarrow & 4\ 1\ 3\ 2\ 4 & \phi_u = \{2\} \\
\text{Etape 3 :} & 4\ 1\ [3]\ 2\ 4 & \rightsquigarrow & 4\ 1\ 3\ 2\ 4 & \phi_u = \{2\} \\
\text{Etape 4 :} & \underline{4}\ 1\ 3\ 2\ \boxed{4} & \rightsquigarrow & 5\ 1\ 3\ 2\ 4 & \phi_u = \{2,4\}
\end{array}$$

Ainsi, après 2 étapes : $\mathcal{B}_2(31223) = 51324$ et $\phi_u = \{2, 4\}$.

Prenons $u = 2311423$:

$$\begin{array}{llll}
\text{Etape 1 :} & \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \boxed{1}\ \underline{4}\ \underline{2}\ \underline{3} & \rightsquigarrow\ 3\,4\,2\,1\,5\,3\,4 & \phi_u = \{1\} \\
\text{Etape 2 :} & 3\ 4\ [2]\ 1\ 5\ 3\ 4 & \rightsquigarrow\ 3\,4\,2\,1\,5\,3\,4 & \phi_u = \{1\} \\
\text{Etape 3 :} & \underline{3}\ \underline{4}\ 2\ 1\ \underline{5}\ \boxed{3}\ \underline{4} & \rightsquigarrow\ 4\,5\,2\,1\,6\,3\,5 & \phi_u = \{1,3\} \\
\text{Etape 4 :} & [4]\ 5\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5 & \rightsquigarrow\ 4\,5\,2\,1\,6\,3\,5 & \phi_u = \{1,3\} \\
\text{Etape 5 :} & 4\ \underline{5}\ 2\ 1\ \underline{6}\ 3\ \boxed{5} & \rightsquigarrow\ 4\,6\,2\,1\,7\,3\,5 & \phi_u = \{1,3,5\}
\end{array}$$

Ainsi, après 5 étapes : $\mathcal{B}_2(2311423) = 4621735$ et $\phi_u = \{1,3,5\}$.

Remarquons que $a_1 \ldots a_n$ est toujours une permutation : après k étapes chacun des entiers $1, 2, \ldots, k$ apparaît exactement une fois, d'après l'algorithme. Ainsi, après au plus n étapes, nous obtenons une permutation.

3.2 Construction de $\mathcal{B}_2^{-1}$

En fait, il est assez délicat de trouver l'inverse de $\mathcal{B}_2$ sans manipulations astucieuses : c'est exactement pour cela que l'on a introduit l'ensemble ϕ_u. En effet, connaissant $\mathcal{B}_2(u)$ ainsi que ϕ_u on peut facilement retrouver u : il suffit de remplacer chaque élément a_i de $\mathcal{B}_2(u)$ par $a_i - \mathrm{Card}(\{j \in \phi_u | j < a_i\})$, c'est-à-dire de soustraire de a_i le nombre d'éléments de ϕ_u qui sont strictement inférieurs à a_i. Ce n'est qu'une conséquence de l'algorithme.

<u>Par exemple :</u>

Prenons $\mathcal{B}_2(u) = 51324$ et $\phi_u = \{2,4\}$,
$\mathrm{Card}(\{j \in \{2,4\} | j < 5\}) = 2$
$\mathrm{Card}(\{j \in \{2,4\} | j < 1\}) = 0$
$\mathrm{Card}(\{j \in \{2,4\} | j < 3\}) = 1$
$\mathrm{Card}(\{j \in \{2,4\} | j < 2\}) = 0$
$\mathrm{Card}(\{j \in \{2,4\} | j < 4\}) = 1$
On en tire : $u = \overline{(5-2)(1-0)(3-1)(2-0)(4-1)} = 31223$, comme dans (3.1).

Nous devons réussir à détérminer ϕ_u seulement à partir de $\mathcal{B}_2(u)$: cela est plus compliqué. Néanmoins, on y parvient avec le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Nous avons l'équivalence suivante :*

$$k \in \phi_u \iff k+1 \text{ apparaît à la gauche de } k \text{ dans } \mathcal{B}_2(u) \tag{4}$$

<u>Par exemple :</u>

Prenons $\mathcal{B}_2(u) = 51324$.
- 2 est à la droite de 1, donc $1 \notin \phi_u$
- 3 est à la gauche de 2, donc $2 \in \phi_u$
- 4 est à la droite de 3, donc $3 \notin \phi_u$
- 5 est à la gauche de 4, donc $4 \in \phi_u$

D'où $\phi_u = \{2,4\}$, comme au-dessus.

Prouvons d'une part que : $k \in \phi_u \Longrightarrow k+1$ *apparaît à la gauche de* k *dans* $\mathcal{B}_2(u)$. Supposons que $k \in \phi_u$. Lorsque l'on calcule $\mathcal{B}_2(u)$, examinons l'étape où, à l'intérieur de la boucle **pour**, $i = k$. Puisque $k \in \phi_u$, k apparaît au moins deux fois. De plus, d'après l'algorithme, le k qui est le plus à droite va engendrer

k dans $\mathcal{B}_2(u)$, et le deuxième k le plus à droite va engendrer $k+1$ dans $\mathcal{B}_2(u)$, de sorte que $k+1$ va apparaître à la gauche de k dans $\mathcal{B}_2(u)$. ■

Prouvons d'autre part que : $k \notin \phi_u \Longrightarrow k{+}1$ *apparaît à la droite de* k *dans* $\mathcal{B}_2(u)$. Supposons que $k \notin \phi_u$. Lorsque l'on calcule $\mathcal{B}_2(u)$, examinons l'étape où, à l'intérieur de la boucle **pour**, $i = k$. Supposons que $k+1$ n'apparaît pas à la droite de k. Soit p la position de k (b_p est ainsi le nombre en p-ième position dans u). En parcourant les étapes que l'on vient de réaliser à l'envers, il apparaît que les nombres $b_p + 1$ ne vont pas apparaître à droite de b_p , ce qui contredit le fait que u soit une bonne suite. ■

Notons que le lemme 3.2 est équivalent au lemme suivant :

Lemme 3.2 bis :

$$k \notin \phi_u \iff k+1 \textit{ apparaît à la droite de } k \textit{ dans } \mathcal{B}_2(u).$$

En utilisant les résultats précédents, nous pouvons finalement décrire $\mathcal{B}_2^{-1}$ par l'application suivante : Soient $w \in \mathfrak{S}_n$ et $\phi_w = \{j \in [n-1] \mid j+1 \text{ apparaît à la gauche de } j \text{ dans } w\}$.

$$\text{Pour tout élément } a_i \text{ de } w, \text{ remplaçer } a_i \text{ par } a_i - \mathrm{Card}(\{j \in \phi_w \mid j < a_i\}).$$

On définit cette nouvelle suite comme $\mathcal{B}_2^{-1}(w)$. Il est clair que $\mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_2 = Id$ d'après les lemmes 3.2 et 3.2 bis. On en déduit que $\mathcal{B}_2$ est une bijection, puisque $\mathrm{Card}(G_n) = \mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)$. ■

3.3 Preuve du théorème 3.1

Le théorème 3.1 peut être facilement prouvé en utilisant la bijection $\mathcal{B}_2$.

Définition : Soit $\mathrm{c}(n,k)$ le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ possédant exactement k cycles. Ce nombre est appelé *nombre de Stirling sans signe de première espèce associé à n et k* [3].

Preuve : Soit $u \in G_n$. Soient $i, j \in [n]$ tels que $i \neq j$, $u = b_1 \dots b_n$ et $\mathcal{B}_2(u) = a_1 \dots a_n$. Clairement si $b_i > b_j$ alors $a_i > a_j$ car b_i est incrémenté au moins le même nombre de fois que b_j, et si $b_i = b_j$ pour $i > j$ alors $a_i > a_j$ car b_i sera incrémenté au moins une fois de plus que b_j, puisque b_i est à la gauche de b_j.

On en déduit que $\mathcal{B}_2$ préserve les records, c'est-à-dire que $\mathcal{B}_2$ préserve les positions des records et leur nombre. Donc :

$$\sum_{u \in G_n} q^{\mathrm{rec}(u)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{rec}(w)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{u \in G_n} q^{\mathrm{srec}(u)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{srec}(w)}.$$

Lemme 3.3. *Le nombre d'éléments de G_n avec exactement k records vaut $\mathrm{c}(n,k)$.*

Preuve : D'après le résultat précédent, le nombre d'éléments de G_n avec k records est égal au nombre d'élements de $\mathfrak{S}_n$ avec k records. De plus la bijection de *standardisation*, qui est une bijection $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ décrite dans [3], envoie une permutation avec k records sur une permutation avec k cycles et réciproquement. Il en découle que le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ avec k records vaut $\mathrm{c}(n,k)$ et donc que le nombre d'éléments de G_n avec k records vaut $\mathrm{c}(n,k)$. ■

D'autre part, on prouve (voir [3]) que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{c}(n,k)q^k = q(q+1)\cdots(q+n-1).$$

Finalement :

$$\sum_{u\in G_n} q^{\mathrm{rec}(u)} = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{rec}(w)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{c}(n,k)q^k = q(q+1)\cdots(q+n-1).$$

■

3.4 Une autre interprétation de $\mathcal{B}_2$

Nous allons prouver la proposition exposée en introduction, à savoir :

Soit $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$. Considérons une route circulaire qui soit bordée de n maisons numérotées $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Un postier porte n lettres numérotées $1, 2, \dots, n$ qui doivent être délivrées d'après les règles suivantes : (i) la lettre $k = 1, \dots, n$ doit être délivrée à la maison k et (ii) la lettre k doit être délivrée avant la lettre $k+1$. Le postier commence sa tournée à la maison a_n et parcourt la route dans le sens des aiguilles d'une montre. Lorsqu'il délivre une lettre à la maison a_k, il associe à la maison a_k l'entier b_k qui est égal au nombre de fois où il est passé devant la maison a_n (en comptant le départ). Autrement dit, appliquer la méthode exposée en introduction revient à calculer l'inverse d'une permutation par $\mathcal{B}_2$.

Théorème 3.4. *On a $b_1 \dots b_n = \mathcal{B}_2^{-1}(w)$.*

Nous dirons qu'une suite strictement décroissante $u_1 \dots u_n$ *décroît petit à petit* si $u_{i+1} = u_i - 1$ pour tout $1 \le i \le n-1$. Nous allons prouver la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Soient $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$ et $i_1 < \cdots < i_l$. Supposons que (i) $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$ décroît petit à petit et que (ii) $a_{i_1}+1$ n'apparaît pas à la gauche de a_{i_1} dans w. Soit m tel que $a_m = a_{i_1}+1$ (si $a_{i_1} \ne max(w)$ alors m existe). Soit finalement $u = b_1 \dots b_n = \mathcal{B}_2^{-1}(w)$. Alors $b_{i_1} = b_{i_2} = \cdots = b_{i_l} = b_m - 1$.*

Preuve : Soit $k = \mathrm{Card}(\{x \in \phi_u \mid x < a_{i_l}\})$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de ϕ_u qui sont strictement inférieurs à a_{i_l}. Il s'ensuit de la définition de $\mathcal{B}^{-1}$ que $b_{i_l} = a_{i_l} - k$. Puisque $i_1 < \cdots < i_l$ d'une part et $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$ décroît petit à petit d'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $2 \le j \le l$ nous avons $a_{i_j} \in \phi_u$. D'où $\mathrm{Card}(\{x \in \phi_u \mid x < a_{i_{l-1}} = a_{i_l}+1\}) = k+1$ et $b_{i_{l-1}} = a_{i_{l-1}} - (k+1) = a_{i_l} + 1 - (k+1) = a_{i_l} - k = b_{i_l}$. Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $2 \le j \le l$, $b_{i_j} = a_{i_l} - k = b_{i_l}$. De plus, puisque $a_{i_1}+1$ n'apparaît pas à la gauche de a_{i_1} dans w, nous obtenons que $a_{i_1} \notin \phi_u$. Donc :

$$\mathrm{Card}(\{x \in \phi_u \mid x < a_m = a_{i_1}+1\} = \mathrm{Card}(\{x \in \phi_u \mid x < a_{i_1}\}$$

D'où :

$$b_m = a_m - \mathrm{Card}(\{x \in \phi_u \mid x < a_{i_1}\} = 1 + a_{i_1} - (k+l-1) = 1 + a_{i_l} + (l-1) - (k+l-1) = 1 + a_{i_l} - k = 1 + b_{i_l}.$$

Ainsi $b_m - 1 = b_{i_l}$, comme annoncé. ■

Pour prouver le théorème 3.4, considérons w_1 l'ensemble (*dont les éléments sont rangés dans l'ordre décroissant*) des positions des éléments de la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément 1, et w_2 l'ensemble (*dont les éléments sont rangés dans l'ordre décroissant*) des positions des éléments de la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément $\max(w_1)+1$, *etc* jusqu'à w_m l'ensemble (*dont les éléments sont rangés dans l'ordre décroissant*) des positions des éléments de la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément $\max(w_{m-1})+1$ et telle que $\max(w_m)=\max(w)$. D'après la proposition précédente, il existe k tel que :

$$\begin{array}{rcll} b_i & = & k & \text{pour } i\in w_1 \\ b_i & = & k+1 & \text{pour } i\in w_2 \\ & \vdots & & \\ b_i & = & k+j-1 & \text{pour } i\in w_j \\ & \vdots & & \\ b_i & = & k+m-1 & \text{pour } i\in w_m. \end{array} \tag{5}$$

D'après le lemme 2.3, on a $k=1$ ce qui prouve le théorème 3.4. Notons également que $\max(u)=m$. ■

Par exemple : Prenons $w=3562417$. On trouve que :
- $w_1=\{6,4,1\}$, puisque la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément 1 est : $\boxed{3}56\boxed{2}4\boxed{1}7$.
- $w_2=\{5,2\}$, puisque la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément 4 est : $3\boxed{5}62\boxed{4}17$.
- $w_3=\{3\}$, puisque la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément 6 est : $35\boxed{6}2417$.
- $w_4=\{7\}$, puisque la plus longue sous-suite qui décroît petit à petit de plus petit élément 7 est : $356241\boxed{7}$.

Et en effet, puisque $u:=b_1\dots b_7:=\mathcal{B}_2^{-1}(3562417)=1231214$,

$$\begin{array}{rcll} b_i & = & 1 & \text{pour } i\in\{6,4,1\} \\ b_i & = & 2 & \text{pour } i\in\{5,2\} \\ b_i & = & 3 & \text{pour } i\in\{3\} \\ b_i & = & 4 & \text{pour } i\in\{7\}. \end{array}$$

3.5 Lien entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_2$

Concluons cette section par une propriété qui nous sera fondamentale lors de l'étude des motifs évitables et qui permet d'établir un lien entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_2$.

Définitions : Soit $w\in\mathfrak{S}_n$.
- On appelle $\mathrm{des}(w)$ l'ensemble des descentes de w. On rappelle qu'une descente de w est un entier i pour lequel $a_i>a_{i+1}$.
  Par exemple $\mathrm{des}(36\underline{7}2\underline{4}15)=\{3,5\}$.
- $\mathrm{i}(w)$ désigne la *permutation inverse* de w (elle est généralement notée w^{-1} mais, comme nous le verrons, il est plus pratique pour nous d'utiliser $\mathrm{i}(w)$). Par définition, si $\mathrm{i}(w)=a_1\dots a_n$ alors a_i est la position de i dans w. Par exemple $\mathrm{i}(461235)=345162$.

Théorème 3.6. *Soit $u\in G_n$. Alors ϕ_u est l'ensemble des descentes de $\mathrm{i}(\mathcal{B}_2(u))$.*

Preuve : Soient $u=b_1\dots b_n\in G_n$ et $\mathcal{B}_2(u)=a_1\dots a_n$. D'après le lemme 3.2,

$$\begin{array}{rcl} k\in\phi_u & \Leftrightarrow & k+1 \text{ apparaît à la gauche de } k \text{ dans } \mathcal{B}_2(u) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{i}(\mathcal{B}_2(u))_k>\mathrm{i}(\mathcal{B}_2(u))_{k+1} \\ & \Leftrightarrow & k \text{ est une descente de } i(\mathcal{B}_2(u)) \end{array}$$

où $\mathrm{i}(\mathcal{B}_2(u))_k$ est le k-ième élément de $\mathrm{i}(\mathcal{B}_2(u))$. ■

Comme dans la preuve du théorème 3.4, introduisons les ensembles $w_1,\ w_2, \ldots, w_m$ pour une permutation w.

Lemme 3.7. *On a* $i(w) = w_1 w_2 \ldots w_m$.

Preuve : Par définition, les éléments de w, dont les positions sont les éléments w_1, forment une sous-suite qui décroît petit à petit. On en déduit que les positions de $1,\ 2, \ldots, \mathrm{Card}(w_1)$ dans w sont exactement les éléments de w_1. D'après le même argument, les positions de $\mathrm{Card}(w_1)+1,\ \mathrm{Card}(w_1)+2, \ldots, \mathrm{Card}(w_1) + \mathrm{Card}(w_2)$ dans w sont exactement les éléments de w_2 et ainsi de suite. Donc $\mathrm{i}(w) = w_1 w_2 \ldots w_m$.
Notons que l'on identifie l'ensemble w_1 à la suite obtenue en écrivant un par un les éléments de w_1, en commençant par le premier. ■

Par exemple, pour $w = 3562417$ on a $w_1 = \{6,4,1\}$, $w_1 = \{5,1\}$, $w_1 = \{3\}$, $w_1 = \{7\}$ et on a bien

$$\mathrm{i}(3562417) = 6415237 = 641\,52\,3\,7 = w_1 w_2 w_3 w_4.$$

Définition : Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. On note $\mathrm{r}(w)$ la *permutation renversée* de w (si $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ alors $\mathrm{r}(w) = a_n \ldots a_2 a_1$).

Théorème 3.8. *Soit* $w \in \mathfrak{S}_n$. *Alors* $\mathcal{B}_2(\mathcal{B}^{-1}(w)) = i(r(w))$.

Preuve : Soient $u = b_1 \ldots b_n$, $\mathcal{B}_2(u) = w = a_1 \ldots a_n$ et $\max(u) = k+1$. D'après le lemme 3.7, on peut partager $\mathrm{i}(w)$ en $k+1$ *sous-suites* $w_1, \ldots, w_{k+1}$ telles que chaque w_i ne contienne pas de montée, *i.e.* telles que chaque w_i soit strictement décroissante et telles que $\mathrm{i}(w) = w_1 \ldots w_{k+1}$. Pour tout $i \in [k+1]$ soit $w'_i = \mathrm{r}(w_i)$. Alors : $\mathrm{r}(\mathrm{i}(w)) = w'_{k+1} \ldots w'_1$. Puisque w_i est strictement décroissante, w'_i est strictement croissante et donc $r(i(w))$ a exactement k descentes. D'après (5) :

$$\begin{array}{rcll} b_i & = & 1 & \text{pour } i \in w'_1 \\ b_i & = & 2 & \text{pour } i \in w'_2 \\ & \vdots & & \\ b_i & = & j & \text{pour } i \in w'_j \\ & \vdots & & \\ b_i & = & k+1 & \text{pour } i \in w'_{k+1}. \end{array} \tag{6}$$

Ici aussi nous avons identifié la suite w'_j à l'ensemble de tous les éléments de la suite w'_j.
En comparant (6) et (3) on en tire immédiatement que $\mathcal{B}^{-1}(\mathrm{r}(\mathrm{i}(w))) = b_1 \ldots b_n = u$. D'où :

$$\mathcal{B}^{-1}(\mathrm{r}(\mathrm{i}(\mathcal{B}_2(u)))) = u$$

et $\mathcal{B}_2(u) = \mathrm{i}(\mathrm{r}(\mathcal{B}(u)))$. Prenons w' tel que $u = \mathcal{B}^{-1}(w')$. Alors $\mathcal{B}_2(\mathcal{B}^{-1}(w')) = \mathrm{i}(\mathrm{r}(w'))$. ■

Par exemple : Pour $w = 3562417$ on a $w'_1 = 146$, $w'_2 = 25$, $w'_3 = 3$, $w'_4 = 7$. D'une part :

$$\mathrm{r}(\mathrm{i}(w)) = 7325146 = 7\,3\,25\,146 = w'_4 w'_3 w'_2 w'_1.$$

D'autre part $u := b_1 \ldots b_7 := \mathcal{B}_2^{-1}(3562417) = 1231214$ et on a bien :

$$\begin{array}{rcll} b_i & = & 1 & \text{pour } i \in \{1,4,6\} \\ b_i & = & 2 & \text{pour } i \in \{2,5\} \\ b_i & = & 3 & \text{pour } i \in \{3\} \\ b_i & = & 4 & \text{pour } i \in \{7\}. \end{array}$$

4 Motifs évitables et polynômes Eulériens

Le fait que $\mathcal{B}_2$ conserve les records invite à étendre le concept de motif évitable sur les bonnes suites.

Définitions :
- Soit $w = a_1 \cdots a_k \in \mathfrak{S}_k$. On dit que la suite $b_1 \dots b_n \in \mathfrak{S}_n$ (avec $k \leq n$) *évite* w si aucune de ses sous-suites de longueur k n'est rangée "dans le même ordre" que w, autrement dit s'il n'existe pas k entiers strictement positifs $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tels que $b_{i_r} < b_{i_s} \iff a_r < a_s$. Par exemple, $\underline{5}21\underline{34}$ n'évite pas 312 car 534 est rangé dans le même ordre que 312, mais 52134 évite 2413.
- Une *suite pleine* s est une suite de k entiers strictement positifs telle que tout $i \in [\max(s)]$ apparaît dans s. Soit F_k l'ensemble des suites pleines de longueur k. On peut remarquer que toute bonne suite est une suite pleine d'après le lemme 2.3. Soit u une bonne suite de longueur $n \geq k$. Comme au dessus, nous pouvons introduire la définition suivante : $u = b_1 \dots b_n$ *évite une suite pleine* $s = a_1 \dots a_k$ s'il n'existe pas k entiers strictement positifs $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tels que $b_{i_r} < b_{i_s} \iff a_r < a_s$ et $b_{i_r} = b_{i_s} \iff a_r = a_s$. Par exemple $u = \underline{13}2\underline{34}22$ n'évite pas $s = 1223$ mais u évite $s = 13324$.

Supposons que $w \in \mathfrak{S}_n$ évite une permutation. Le but de cette section est de déterminer quel genre de suites $\mathcal{B}_2^{-1}(w)$ évite.

Soit $a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$. On définit $\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$ comme suit :

$$\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n} = \{s_1 \dots s_n \in F_n \mid \text{ si } i < j,\ (a_i < a_j) \iff (s_i < s_j)\}. \tag{7}$$

Par exemple, pour $w = 4132$, $\mathfrak{M}_{4132} = \{2122, 3122, 3132, 4132\}$.

Notons que cette définition ne nous permet ni de déterminer facilement $\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$, ni de calculer le cardinal de cet ensemble.

Théorème 4.1. *Soient $k \leq n$ et $w_0 \in \mathfrak{S}_k$. Le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui évitent w_0 est égal au nombre d'éléments de G_n qui évitent simultanément tous les éléments de $\mathfrak{M}_{w_0}$.* ■

Preuve : Soient $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$, $u = \mathcal{B}_2^{-1}(w) = b_1 \dots b_n$ et $w_0 = c_1 \dots c_k \in \mathfrak{S}_k$. Nous allons prouver la proposition suivante :

$$\exists\, x \in \mathfrak{M}_{w_0} \textit{ tel que } u \textit{ n'évite pas } x \iff w \textit{ n'évite pas } w_0.$$

D'abord, supposons que $\exists\, x \in \mathfrak{M}_{w_0}$ tel que u n'évite pas $x = d_1 \dots d_k$. Alors il existe k entiers strictement positifs $i_1 < \cdots < i_k$ tels que $b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}$ soit rangée dans le même ordre que x. Soient l, m tels que $1 \leq l < m \leq k$. D'après la définition de x, $c_l < c_m \iff d_l < d_m$. D'après la définition des entiers i_j, $d_l < d_m \iff b_{i_l} < b_{i_m}$. D'après la définition de $\mathcal{B}_2$, $b_{i_l} < b_{i_m} \iff a_{i_l} < a_{i_m}$. D'où $c_l < c_m \iff a_{i_l} < a_{i_m}$ et donc $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ est rangée dans le même ordre que w_0, ce qui signifie que w n'évite pas w_0.

Ensuite, supposons que w n'évite pas w_0. Alors il existe k entiers strictement positifs $i_1 < \cdots < i_k$ tels que $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ soit rangée dans le même ordre que w_0. Soient l, m tels que $1 \leq l < m \leq k$. Alors $c_l < c_m \iff a_{i_l} < a_{i_m}$. D'après la définition de $\mathcal{B}_2^{-1}$, $a_{i_l} < a_{i_m} \iff b_{i_l} < b_{i_m}$. Soit $b = b_{i_1} \dots b_{i_k}$. On prend [3] :

$$x = \overline{(b_{i_1} - (\min(b) - 1))(b_{i_2} - (\min(b) - 1)) \dots (b_{i_k} - (\min(b) - 1))}$$

Puisque :

$$c_l < c_m \iff a_{i_l} < a_{i_m} \iff b_{i_l} < b_{i_m} \iff x_l < x_m$$

[3] On définit ainsi x pour obtenir une suite pleine lorsque $\min(b) \neq 1$

nous avons $x \in \mathfrak{M}_{w_0}$ et la preuve est achevée. ■

Nous pouvons étendre l'ensemble de départ de $\mathcal{B}_2$ à F_n en calculant $\mathcal{B}_2(s)$ pour chaque élément $s \in F_n$ en appliquant le même algorithme que pour les bonnes suites (section 3.1). La seconde partie de la preuve du théorème 4.1 fournit le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *Soit* $w \in \mathfrak{S}_n$. *Alors* $\mathfrak{M}_w = \{s \in F_n \mid \mathcal{B}_2(s) = w\}$.

Théorème 4.3. *On a :*

$$Card(\mathfrak{M}_w) = 2^{Card(des(i(w)))}.$$

Par exemple :
- $w = 123$ et $\mathfrak{M}_{123} = \{123\}$. Card(des(i(123))) = Card(des(123)) = Card($\emptyset$) = 0
- $w = 132$ et $\mathfrak{M}_{132} = \{122, 132\}$. Card(des(i(132))) = Card(des(132)) = Card($\{2\}$) = 1
- $w = 213$ et $\mathfrak{M}_{213} = \{112, 213\}$. Card(des(i(213))) = Card(des(213)) = Card($\{1\}$) = 1
- $w = 231$ et $\mathfrak{M}_{231} = \{121, 231\}$. Card(des(i(231))) = Card(des(312)) = Card($\{1\}$) = 1
- $w = 312$ et $\mathfrak{M}_{312} = \{212, 312\}$. Card(des(i(312))) = Card(des(231)) = Card($\{2\}$) = 1
- $w = 321$ et $\mathfrak{M}_{321} = \{111, 211, 221, 321\}$. Card(des(i(321))) = Card(des(321)) = Card($\{1, 2\}$) = 2.

Lemme 4.4. *Soient* $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$, $s = s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_w$ *et* k, l *des entiers strictement positifs tels que* $a_k < a_l$. *Alors* $s_k \leq s_l$.

Preuve : Si $k < l$, alors, d'après la définition de s, $a_k < a_l \Longrightarrow s_k < s_l \Longrightarrow s_k \leq s_l$. Maintenant, si $k > l$, supposons que $s_k > s_l$. D'après la définition de s, puisque $l < k$, $s_l < s_k \Longrightarrow a_l < a_k$ ce qui est une contradiction. ■

Preuve du théorème 4.3 : Soient $w = a_1 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$, $s = s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_w$ et soient k, l des entiers strictement positifs tels que $a_l = a_k + 1$. Clairement, si $s_l \geq s_k + 2$, alors $s_k + 1$ n'apparaît pas dans s d'après le lemme 4.4, ce qui contredit le fait que s soit une suite pleine.

D'abord, supposons que $a_k \in \phi_w$, c'est-à-dire que $a_k + 1$ apparaît à la gauche de a_k dans w. D'après le lemme 4.4, $s_l = s_k + 1$ ou $s_l = s_k$. Posons $j = a_k$. Soit $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Alors $k = i_j$ et $l = i_{j+1}$ car i_j est la position de j dans w. Ainsi :

$$j \in \phi_w \Longrightarrow s_{i_{j+1}} = s_{i_j} \text{ ou } s_{i_{j+1}} = s_{i_j} + 1. \tag{8}$$

Ensuite, supposons que $a_k \notin \phi_w$, c'est-à-dire que $a_k + 1$ apparaît à la droite de a_k dans w. Alors $k < l$. D'après la définition de s, $a_k < a_l \Longrightarrow s_k < s_l \Longrightarrow s_l = s_k + 1$ d'après le lemme 4.4. De même, posons $j = a_k$. Soit $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Alors $k = i_j$ et $l = i_{j+1}$. Ainsi :

$$j \notin \phi_w \Longrightarrow s_{i_{j+1}} = s_{i_j} + 1. \tag{9}$$

Intuitivement on peut sentir ce qui va se passer : on veut construire un élément de $\mathfrak{M}_w$ en définissant récursivement la suite s_{i_p} pour $p = 1, 2, \dots n$. D'après (8) et (9) on a deux choix pour tous les éléments de ϕ_w et un unique choix pour tous les éléments qui ne sont pas dans ϕ_w, ce qui produit $2^{\mathrm{Card}(\phi_w)}$ éléments de $\mathfrak{M}_w$. Plus précisément, décrivons l'algorithme suivant :

Soit $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Posons $\mathbb{S} = \{11 \dots 11\}$, où $11 \dots 11$ est l'unique suite constituée de n fois le nombre 1.

Pour j de 1 à $n-1$ par pas de 1

Si $j \in \phi_w$

$*$ Pour chaque suite $s = s_1 \dots s_n \in \mathbb{S}$, faire : $s_{i_{j+1}} := s_{i_j}$.

$*$ Créer une nouvelle suite $s' = s$.

$*$ Faire : $s'_{i_{j+1}} := s'_{i_j} + 1$.

$*$ Ajouter s' à $\mathbb{S}$.

Ou bien ($j \notin \phi_w$)

Pour chaque suite $s = s_1 \dots s_n \in \mathbb{S}$, faire : $s_{i_{j+1}} := s_{i_j} + 1$.

FinSi

FinPour

On définit $\mathbb{S}_w$ comme l'ensemble final $\mathbb{S}$.

Par exemple pour $w = 25143$ on a $\mathrm{i}(w) = 31542$ et $\phi_{25143} = \{1, 3, 4\}$. Commençons avec $\mathbb{S} = \{11111\}$
Pour $j = 1$, puisque $1 \in \phi_{25143}$, on a $\mathbb{S} = \{11111\,,\, 21111\}$.
Pour $j = 2$, puisque $2 \notin \phi_{25143}$, on a $\mathbb{S} = \{11112, 21113\}$.
Pour $j = 3$, puisque $3 \in \phi_{25143}$, on a $\mathbb{S} = \{11122, 11132\,,\, 21133, 21143\}$.
Pour $j = 4$, puisque $4 \in \phi_{25143}$, on a finalement

$$\mathbb{S}_{25143} = \{12122, 13122\,,\, 13132, 14132\,,\, 23133, 24133\,,\, 24143, 25143\}.$$

Proposition 4.5. *Nous avons l'inclusion suivante :* $\mathfrak{M}_w \subset \mathbb{S}_w$.

Preuve : Cette inclusion est évidente car tout élément de $\mathfrak{M}_w$ vérifie (8) et (9), de sorte qu'il sera produit par l'algorithme et sera par conséquent un élément de $\mathbb{S}_w$. ∎

Proposition 4.6. *Nous avons l'inclusion suivante :* $\mathbb{S}_w \subset \mathfrak{M}_w$.

Preuve : Soient $w = a_1 \dots a_n$ une permutation fixée et $s \in \mathbb{S}_w$. Posons $\mathrm{i}(w) = i_1 \dots i_n$. Il est clair par construction que s est une suite pleine. Montrons que pour $x < y$, $(a_x < a_y) \Longleftrightarrow (s_x < s_y)$.

Soient x, y tels que $x < y$ et $a_x < a_y$. Alors il existe k tel que $x \leq k < y$ et $a_k \notin \phi_w$. D'après l'algorithme :

$$s_x \leq s_{x+1} \leq \cdots \leq s_k < s_{k+1} \leq \cdots \leq s_y,$$

de sorte que $s_x < s_y$.

Soient x, y tels que $x < y$ et $s_x < s_y$. D'après l'algorithme, si $s_{i_k} < s_{i_l}$ alors $k < l$. Or $x = i_{a_x}$, $y = i_{a_y}$ et $s_{i_{a_x}} < s_{i_{a_y}}$. Donc $a_x < a_y$. ∎

Ainsi l'ensemble $\mathbb{S}_w$ est exactement $\mathfrak{M}_w$. Or le nombre d'éléments de $\mathbb{S}_w$ est $2^{\mathrm{Card}(\phi_w)}$. De plus, d'après le théorème 3.6 : $\mathrm{Card}(\phi_w) = \mathrm{Card}(\mathrm{des}(\mathrm{i}(w))))$. On en déduit que :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{M}_w) = 2^{\mathrm{Card}(\phi_w)} = 2^{\mathrm{Card}(\mathrm{des}(\mathrm{i}(w)))}.$$

∎

Définition : $A_n(q)$ est appelé *polynôme eulérien* [3]. Le coefficient de q^i dans $A_n(q)$ est noté $A(n, i)$ et vérifie la relation suivante :

$$\sum_{k \geq 0} k^n q^k = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(n,i) q^i}{(1-q)^{n+1}}. \quad [4]$$

[4]L'existence de $A_n(q)$ provient de la relation $\sum_{k \geq 0} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ sur laquelle on applique l'opération suivante n fois à la suite : dériver par rapport à q puis multiplier par q.

Par exemple,

$$\sum_{k\geq 0} k^4 q^k = \frac{q + 11q^2 + 11q^3 + q^4}{(1-q)^5}.$$

En notant $\mathrm{d}(w)$ le nombre de descentes de w, on prouve (voir [2]) que $A(n, k+1)$ compte le nombre de permutations de $[n]$ avec k descentes, c'est-à-dire :

$$A_n(q) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{1+\mathrm{d}(w)}.$$

Par exemple, $A_4(q) = q + 11q^2 + 11q^3 + q^4$ et effectivement dans $\mathfrak{S}_n$, il y a un élément avec aucune descente, onze avec une descente, onze avec deux descentes et un avec trois descentes.

Soit $f(n)$ le nombre de manières de classer n participants d'une compétition, s'autorisant les ex aequo [2]. Par exemple, $f(3) = 13$ (six manières avec aucun ex aequo, trois manières avec deux ex aequo à la première place, trois manières avec deux ex aequo à la seconde place, et une manière avec trois ex aequo).

Il est facile de voir que $f(n) = \mathrm{Card}(F_n)$, puisqu'un tel classement peut être mis en bijection avec une suite pleine $s_1 \dots s_n$ par la construction suivante : s_i est la position de i dans le classement.

Corollaire 4.7. *La relation suivante est vérifiée :*

$$f(n) = \frac{A_n(2)}{2}.$$

Preuve : Considérons toutes les permutations $w_1, \dots, w_{n!}$ de $[n]$. Les ensembles $\mathfrak{M}_{w_1}, \dots, \mathfrak{M}_{w_{n!}}$ sont clairement disjoints : en effet, supposons que $s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$ et que $s_1 \dots s_n \in \mathfrak{M}_{a'_1 \dots a'_n}$. D'après la définition (7), pour $i < j$ on a $a_i < a_j \iff s_i < s_j \iff a'_i < a'_j$. Comme $a_1 \dots a_n$ et $a'_1 \dots a'_n$ sont des permutations, on a forcément $a_1 \dots a_n = a'_1 \dots a'_n$. Ainsi [5] :

$$F_n = \mathfrak{M}_{w_1} \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{M}_{w_{n!}}.$$

En effet, il est d'une part clair que tout élément de $\mathfrak{M}_{w_1} \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{M}_{w_{n!}}$ est une suite pleine et que d'autre part si s est suite pleine alors $s \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_2(s)}$, d'après le corollaire 4.2. Soit w une permutation telle que $\mathrm{i}(w)$ ait exactement k descentes. D'après le théorème 4.3, $\mathrm{Card}(\mathfrak{M}_w) = 2^k$. Mais le nombre de permutations de $[n]$ ayant exactement k descentes est $A(n, k+1)$. On en déduit que :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k A(n, k+1) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} A(n, k+1)}{2} = \frac{A_n(2)}{2}.$$

■

Note : On peut prouver (voir [2]) que la fonction génératrice exponentielle de $f(n)$ est $\dfrac{1}{2 - e^x}$.

Remarque générale : On peut démontrer le corollaire 4.7 sans introduire ni les bonnes suites ni les motifs évitables. En effet, on définit ϕ_w ainsi que $\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$, on montre que $\mathrm{Card}(\phi_w) = \mathrm{Card}(\mathrm{des}(\mathrm{i}(w))))$ et on commence la preuve par le lemme 4.4. Cependant, cette preuve semble trop artificielle dans le sens où il est difficile d'y comprendre les raisons de l'introduction de ϕ_w et de $\mathfrak{M}_{a_1 \dots a_n}$.

[5] Si A et B sont deux ensembles disjoints, on note $A \sqcup B$ leur *union disjointe*.

Références

[1] F. Ardila, *Communication Privée*, Non publié.

[2] R. P. Stanley, *Clay Research Academy Problems* 2005, Non publié.

[3] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 1*, Cambridge, England : Cambridge University Press (1999).

[4] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 2*, Cambridge, England : Cambridge University Press (1999).

[5] E. W. Weisstein. *Eulerian Number*, De MathWorld – Une Resource Web Wolfram. `http ://mathworld.wolfram.com/EulerianNumber.html`

[6] I. Kortchemski, *Good Sequences, Bijections and Permutations*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Vol. 6, Issue 2, 2005. `http ://www.rose-hulman.edu/mathjournal/v6n2.php`